第14卷第1期 1994年2月
数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 14 No. 1 Feb. 1994

逆半群的基本矩形带的同余完备性*

汪 立 民
(兰州大学数学系,730000)

摘要 本文讨论了逆半群的基本矩形带上的完备同余,就若干特殊情形给出了这类半群是完备的充分必要条件.

§1 引言与若干准备

本文出现的记号和术语,如果没有加以说明,均参见文献[1].

称半群 S 是一族逆半群的(基本)矩形带,如果 S 是以一矩形;$I\times\Lambda$ 为加标集的一族逆半群 $\{S_{i\lambda}\mid(i,\lambda)\in I\times\Lambda\}$ 的无交并,且 $\forall\ (i,\lambda),(j,\mu)\in I\times\Lambda$, $S_{i\lambda}S_{j\mu}\subseteq S_{i\mu}$ ($S_{i\lambda}S_{j\mu}=S_{i\mu}$). 每个逆半群的基本矩形带都同构于一个逆半群的 Rees 矩形半群,$\mathscr{M}(I,T,\Lambda;P)$,其中 $\mathscr{M}(I,T,\Lambda;P)=I\times T\times\Lambda$,$I,\Lambda$ 都是非空集合,T 是逆半群,P 是由 T 的平移壳的单位元群 $\Sigma(T)$ 中的元素 p_{ij} 构成的 $\Lambda\times I$ 矩阵$(p_{\lambda j})$,半群的乘法定义为$(i,s,\lambda)\cdot(j,t,\mu)=(i,sp_{\lambda j}t,\mu)$. 当 T 为群时,$\mathscr{M}(I,T,\Lambda;P)$就是我们熟知的群的 Rees 矩阵半群(即完全单半群)([2]).

文献[3]研究了 $\mathscr{M}(I,T,\Lambda;P)$上的同余,下面的结论后面要用到.

引理 1[3] 设$(\mathscr{S},\pi,\mathscr{T})$是半群 $S=\mathscr{M}(I,T,\Lambda;P)$上的一个三元容许组($\mathscr{S},\mathscr{T}$ 分别是 I 和 Λ 上的等价关系,π 是 S 上的同余满足一定条件详见[3]). 定义 S 上的关系 ρ 为:$(i,a,\lambda)\rho(j,b,\mu)$当且仅当$(i,j)\in\mathscr{S}$,$(\lambda,\mu)\in\mathscr{T}$,且存在(等价于对任意)$x\in I,\xi\in\Lambda$ 使得 $p_{\xi i}ap_{\lambda x}\pi p_{\xi j}bp_{\mu x}$. 则 ρ 是 S 上满足 $\rho_I=\mathscr{S}$,$\rho_\Lambda=\mathscr{T}$,$\rho_T=\pi$ 的最大同余,记为 $\rho_{(\mathscr{S},\pi,\mathscr{T})}$,其中

$$\rho_I=\{(i,j)\in I\times I\mid(\forall\ \lambda\in\Lambda)(\exists\ e\in E(S_{i\lambda}),f\in E(S_{j\lambda}))e\rho f\},$$
$$\rho_\Lambda=\{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Lambda\mid(\forall\ i\in I)(\exists\ e\in E(S_{i\lambda}),f\in E(S_{i\mu}))e\rho f\},$$
$$\rho_T=\{(a,b)\in T\times T\mid(i,a,\lambda)\rho(i,b,\lambda)\}.$$

半群 S 上的同余 ρ 称为完备的,如果对于 $a,b\in S$,同余类 $a\rho,b\rho$ 和$(ab)\rho$ 作为集合,常满足等式 $a\rho\cdot b\rho=(ab)\rho$. 其上同余都是完备的半群称作完备半群. 完备同余和完备半群的研究始于 1972 年,许多学者研究了各种类型半群的完备性[4-6]. 本文将[5]中的方法用于与[5]中截然不同的半群 $\mathscr{M}(I,T,\Lambda;P)$上,讨论同余 $\rho_{(\mathscr{S},\pi,\mathscr{T})}$ 的完备性,然后证明了 T 为若干特殊类型的半群时,关于$|I|\neq1$ 或$|\Lambda|\neq1$,$\mathscr{M}(I,T,\Lambda;P)$是完备的当且仅当它是完全单半群.

§2 一类完备同余

要确定 $\mathscr{M}(I,T,\Lambda;P)$上的所有完备同余是困难的. 下面我们确定形为 $\rho_{(\mathscr{S},\pi,\mathscr{T})}$ 的完备同余.

* 1991年5月23日收到. 国家自然科学基金资助项目.

引理 2 设 δ 是 $S=\mathscr{M}(I,T,\Lambda;P)$ 作这一矩形带分解的完备矩形同余. 对于任意 $\rho\subseteq\delta$, ρ 是唯一对应于三元容许组 $(\varepsilon_T,\rho_T,\varepsilon_\Lambda)$ 的同余. 当 $\rho=\delta$ 时, $\rho_T=\omega_T$(T 上全关系). $\rho\subseteq\delta$ 是 S 上完备同余当且仅当 ρ_T 是 T 上的完备同余.

证明 显然 $\delta_I=\varepsilon_I,\delta_\Lambda=\varepsilon_\Lambda,\delta_T=\omega_T$, 且 δ 是唯一对应于三元容许组 $(\varepsilon_I,\omega_T,\varepsilon_\Lambda)$ 的同余.

关于 $\rho\subseteq\delta$, 设 $(i,j)\in\rho_I$, 则对于 $\lambda\in\Lambda$, 存在 $e,f\in E(T)$, 使得 $(i,ep_{\lambda i}^{-1},\lambda)\rho(j,fp_{\lambda j}^{-1},\lambda)$. 从而 $(i,ep_{\lambda i}^{-1},\lambda)\delta(j,fp_{\lambda j}^{-1},\lambda)$, 因此 $i=j$, 故 $\rho_I=\varepsilon_I$. 同理 $\rho_\Lambda=\varepsilon_\Lambda$. 据[3]中命题 5.2,

$$(i,s,\lambda)\rho(j,t,\mu)\Leftrightarrow i=j,\lambda=\mu,s\rho_T t. \tag{1}$$

再据引理 1, ρ 是对应于三元容许组 $(\varepsilon_I,\rho_T,\varepsilon_\Lambda)$ 的最大同余. 这说明 ρ 是唯一对应于 $(\varepsilon_I,\rho_T,\varepsilon_\Lambda)$ 的同余.

关于 $(i,s,\lambda)\in S$, 据(1)式有

$$(i,s,\lambda)\rho=\{(i,z,\lambda)\mid z\rho_T s\}=\{(i,z,\lambda)\mid z\in s\rho_T\}. \tag{2}$$

若 ρ 是完备的, 则关于 $(i,s,\lambda),(j,t,\mu)\in S$, 有

$$((i,s,\lambda)(j,t,\mu))\rho\subseteq(i,s,\lambda)\rho\cdot(j,t,\mu)\rho. \tag{3}$$

(2),(3)两式给出

$$((sp_{\lambda j})t)\rho_T\subseteq(sp_{\lambda j})\rho_T\cdot t\rho_T,\ (s,t\in T). \tag{4}$$

关于任意 $u,v\in T$, 令 $s=up_{\lambda j}^{-1},t=v$, 则据(4)式便得 $(uv)\rho_T\subseteq(u\rho_T)(v\rho_T)$. 从而知 ρ_T 是完备同余. 反过来的结论也易证. □

注意 1 若 π 是 T 上的同余, 则显然 $(\varepsilon_I,\pi,\varepsilon_\Lambda)$ 是 S 的一个三元容许组, 且 $\rho_{(\varepsilon_I,\pi,\varepsilon_\Lambda)}\subseteq\delta$, 据引理 2, $\rho_{(\varepsilon_I,\pi,\varepsilon_\Lambda)}$ 是对应于 $(\varepsilon_I,\pi,\varepsilon_\Lambda)$ 的唯一同余, 因此 T 上的同余一一对应于 S 上含于 δ 内的同余. 引理 2 说明, T 上的完备同余一一对应于 S 上含于 δ 内的完备同余.

定理 1 设 ρ 是 $S=\mathscr{M}(I,T,\Lambda;P)$ 上的同余. 则对应于三元容许组 $(\rho_I,\rho_T,\rho_\Lambda)$ 的最大同余 $\rho_{(\rho_I,\rho_T,\rho_\Lambda)}$ 是完备同余, 当且仅当 ρ_T 是 T 上的完备同余.

证明 不妨设 ρ 就是对应于 $(\rho_I,\rho_T,\rho_\Lambda)$ 的最大同余 $\rho_{(\rho_I,\rho_T,\rho_\Lambda)}$. 作同余 $\tau=P\vee S$. 据引理 1, τ 的类形为 $X=\bigcup_{\substack{i\in I_1\\ \lambda\in\Lambda_1}}S_{(i,\lambda)}$, 其中 $S_{(i,\lambda)}=\{(i,a,\lambda)\mid a\in T\}$ 是同构于 T 的逆半群, I_1 和 Λ_1 分别是 I 和 Λ 上等价关系 ρ_I 和 ρ_Λ 的类. 我们指出 X 中每一元所在的 ρ—类都与每一 $S_{(i,\lambda)}(i\in I_1,\lambda\in\Lambda_1)$ 相交. 事实上, 关于 $(k,a,v)\in X$, 取 $y=p_{\xi i}^{-1}p_{\xi k}ap_{vz}p_{\lambda z}^{-1}$, $\xi\in\Lambda,z\in I$, 则 $p_{\xi k}ap_{vz}\rho_T p_{\xi i}yp_{\lambda z}$, 据引理 1, $(k,a,v)\rho(i,y,\lambda)$.

设 ρ_T 是完备的, 我们证明, 关于任意 $(k,a,v)\in S$, $(l,b,\kappa)\in S$, $((k,a,v)(l,b,\kappa))\rho=(k,a,v)\rho(l,b,\kappa)\rho$. 令 $(k,a,v)\tau=\bigcup_{\substack{i\in I_1\\ \lambda\in\Lambda_1}}S_{(i,\lambda)}=X$, $(l,b,\kappa)\tau=\bigcup_{\substack{j\in I_2\\ \mu\in\Lambda_2}}S_{(j,\mu)}=Y$. 分下面两种情形讨论.

(1) $X=Y$. 若 $|I_1|=|\Lambda_1|=1$. 则 $S_{(i,\lambda)}=X=Y=S_{(j,\mu)}$. 这时 $\rho_{(i,\lambda)}=\rho|_{S_{(i,\lambda)}}$ 是完备的. 这是因为, 关于 $(i,a,\lambda),(i,a',\lambda)\in S_{(i,\lambda)}$. 若 $(i,c,\lambda)\rho_{(i,\lambda)}(i,a,\lambda)(i,a',\lambda)$, 则 $c\rho_T ap_{\lambda i}a'$. 因假设 ρ_T 是完备的, 故存在 $c_1,c_1'\in T$, 使得 $c_1\rho_T ap_{\lambda i}$, $c_1'\rho_T a'$, 且 $c=c_1c_1'$. 因此 $(i,c_1p_{\lambda i}^{-1}\lambda)\rho_{(i,\lambda)}(i,a,\lambda)$. $(i,c_1',\lambda)\rho_{(i,\lambda)}(i,a',\lambda)$, 且 $(i,c,\lambda)=(i,c_1p_{\lambda i}^{-1},\lambda)(i,c_1',\lambda)$. 这样关于前述的 $(k,a,v),(l,b,\kappa)\in S$ (此时 $k=i=j=l$, $v=\lambda=\mu=\kappa$),

$$(k,a,v)\rho\cdot(l,b,\kappa)\rho=(i,a,\lambda)\rho_{(i,\lambda)}\cdot(j,b,\mu)\rho_{(i,\lambda)}$$

$$=[(i,a,\lambda)(j,b,\mu)]\rho_{(i,\lambda)}=[(k,a,v)(l,b,v)]\rho.$$

如果$|I_1|\neq 1$或$|\Lambda_1|\neq 1$，据引理 2，$\rho'=\rho\cap\delta$是完备的，又 X 中每一元所在的类与每一$S_{(i,\lambda)}$都相交，可得

$$\begin{aligned}(k,a,v)\rho\cdot(l,b,\kappa)\rho &= \bigcup_{\substack{i\in I_1\\ \lambda\in\Lambda_1}}[(k,a,v)\rho\cap S_{(i,\lambda)}]\cdot\bigcup_{\substack{i\in I_1\\ \lambda\in\Lambda_1}}[(l,b,\kappa)\rho\cap S_{(i,\lambda)}]\\ &\supseteq \bigcup_{\substack{i\in I_1\\ \lambda\in\Lambda_1}}\{[(k,a,v)\rho\cap S_{(i,\lambda)})(l,b,\kappa)\rho\cap S'_{i,\lambda}]\}\\ &= \bigcup_{\substack{i\in I_1\\ \lambda\in\Lambda_1}}[(k,a,v)(l,b,\kappa)\rho\cap S_{(i,\lambda)}]=((k,a,v)(l,b,\kappa))\rho.\end{aligned}$$

(2) $X\neq Y$. 这时$((k,a,v)(l,b,\kappa))\rho\subseteq\bigcup_{\substack{i\in I_1\\ \lambda\in\Lambda_2}}S_{(i,\lambda)}=Z$. 设$d\in((k,a,v)(l,b,\kappa))\rho$. 不妨设$d=(m,d,a)$，$m\in I_1$，$a\in\Lambda_2$. 据前所证，存在$(m,a',v)\in X$，使得$(m,a',v)\rho(k,a,v)$，存在$(l,b',a)\in Y$，使得$(l,b',a))\rho(l,b,\kappa)$. 令$\bar{S}=S_{(m,a)}\cup S_{(l,a)}\cup S_{(l,v)}\cup S_{(m,v)}$，则$\bar{S}$是 S 的子半群，据引理 2，知$\bar{\rho}=\rho|_{\bar{S}}$是$\bar{S}$上的完备同余. 于是

$$\begin{aligned}\bar{d}\in((m,a',v)(l,b',a))\bar{\rho}&=((m,a',v)(l,b',a))\bar{\rho}\\ &=(k,a,v)\bar{\rho}\cdot(l,b,\kappa)\bar{\rho}\subseteq(k,a,v)\rho(l,b,\kappa)\rho.\end{aligned}$$

因此，$((k,a,v)(l,b,\kappa))\rho=(k,a,v)\cdot\rho(l,b,\kappa)\rho$.

综合上述证明，ρ是 S 上的完备同余.

反过来，设ρ是 S 上的完备同余. 为完成必要性证明，我们只需证明$\rho'=\rho\cap\delta$也是完备的. 因为，易知$\rho'=\rho_{(\varepsilon_I,\rho_T,\varepsilon_\Lambda)}$，从而据引理 2，$\rho_T$是完备的.

下证ρ'的完备性，关于$(i,a,\lambda),(j,b,\mu)\in S$，设$(i,c,\mu)\rho'((i,a,\lambda)(j,b,\mu))$. 由$\rho$的完备性，存在$(i,u,\lambda'),(j',v,\mu)\in S$，使得，$(i,u,\lambda')\rho(i,a,\lambda)$，$(j',v,\mu)\rho(j,b,\mu)$，且$(i,c,\mu)=(i,u,\lambda')(j',v,\mu)$. 于是关于任意$\xi\in\Lambda$，$x\in I$，有$up_{\lambda'x}\cdot p_T a\rho_{\lambda x}$，$p_{\xi j'}v\rho_T p_{\xi j}b$，且$c=up_{\lambda'j'}v$. 取$x=j$，$\xi=\lambda'$时，$up_{\lambda'j}p_{\lambda j}^{-1}\rho_T a$，$p_{\lambda'j}^{-1}p_{\lambda'j'}v\rho_T b$. 因此$(i,up_{\lambda'j}p_{\lambda j}^{-1},\lambda)\rho(i,a,\lambda)$，$(j,p_{\lambda'j}^{-1}p_{\lambda'j'}v,\mu)\rho(j,b,\mu)$. 显然，这一结论对$\delta$也适用，故$(i,up_{\lambda'j}p_{\lambda j}^{-1},\lambda)\rho'(i,a,\lambda)$，$(j,p_{\lambda'j}^{-1}p_{\lambda'j'}v,\mu)\rho'(j,b,\mu)$. 又$(up_{\lambda'j}p_{\lambda j}^{-1})p_{\lambda j}(p_{\lambda'j}^{-1}p_{\lambda'j'}v)=up_{\lambda'j'}v=c$，故$(i,c,\mu)=(i,up_{\lambda'j}p_{\lambda j}^{-1},\lambda)(j,\rho_{\lambda'j}^{-1}p_{\lambda'j'}v,\mu)$. 因此$\rho'$是完备的. □

注意 2 即使ρ_T是完备的，对应于三元容许组$(\rho_I,\rho_T,\rho_\Lambda)$的其它非最大同余（如果存在的话）也不一定是完备的. 下例说明了这一点.

例 取$I=\{i\}$，$\Lambda=\{\lambda_1,\lambda_2\}$，逆半群 T 为带有序<的二元半格$\{a,b\}$，$b<a$. 且$P=\{P_{11}\}=\{1_{E(T)}\}$. 则$S=\mathscr{M}((I,T,\Lambda;P)$有四个元素$s_1=(i,a,\lambda_1)$，$s_2=(i,a,\lambda_2)$，$s_3=(i,b,\lambda_1)$，$s_4=(i,b,\lambda_2)$. 显然$N=\{s_3,s_4\}$是 S 的理想. 设ρ_N是关于理想 N 的 Rees 同余. 类为$\{s_1,s_2\}$，$\{s_3,s_4\}$的等价关系显然为同余，记为σ. 则ρ_N不是完备同余，而σ是完备同余. ρ_N，σ都是对应于三元容许组$(\varepsilon_I,\varepsilon_T,\omega_\Lambda)$的同余. 即$((\rho_N)_I,(\rho_N)_T,(\rho_N)_\Lambda)=(\sigma_I,\sigma_T,\sigma_\Lambda)=(\varepsilon_I,\varepsilon_T,\omega_\Lambda)$，而$\sigma=\rho_{(\varepsilon_I,\varepsilon_T,\omega_\Lambda)}$.

群上的同余都是完备的. 完全单半群$\mathscr{M}(I,G,\Lambda;P)$（$G$ 为群）上的同余都形为$\rho_{(\mathscr{T},n,\mathscr{S})}$. 于是据定理 1，我们有

推论 1[5] 完全单半群是完备半群.

§ 3 若干特殊情形

上节注意 2 的例说明，一般地，$\mathscr{M}(I,T,\Lambda;P)$不一定是完备半群．据引理 2 和注意 1，有

引理 3 若 $S=\mathscr{M}(I,T,\Lambda;P)$是完备半群，则 T 是完备逆半群．

进一步，我们考察 Rees 同余．先来刻画理想．

引理 4 设 $S=\mathscr{M}(I,T,\Lambda;P)$，$V$ 是 T 的一个理想，又记 $\bar{p}_{\lambda i}=p_{\lambda i}|_V\in\Sigma(V)$，$i\in I,\lambda\in\Lambda$. $\bar{P}=(\bar{p}_{\lambda i})$．则 $S_V=\mathscr{M}(I,V,\Lambda;\bar{P})$是 S 的一个理想．且 S 的每一理想都是这样构作的．

证明 先证 T 的理想在诸 $p_{\lambda i}$ 的作用下是不变的，即 $p_{\lambda i}V\subseteq V$，$Vp_{\lambda i}\subseteq V$，$i\in I,\lambda\in\Lambda$．事实上，若 V 是 T 的理想，则关于任意 $x\in V$，$p_{\lambda i}x=p_{\lambda i}(xx^{-1}x)=(p_{\lambda i}xx^{-1})x\in V$，$xp_{\lambda i}=x(x^{-1}x)p_{\lambda i}\in V$．若记 $\bar{p}_{\lambda i}=p_{\lambda i}|_V$，则易知 $\bar{p}\in\Sigma(V)$．于是 $S_V=\mathscr{M}(I,V,\Lambda;\bar{P})$是有意义的．显然 $\mathscr{M}(I,T,\Lambda;\bar{P})$是 S 的理想．

反之，设 S_1 是 S 的理想，令 $V=\{t\in T\,|\,(\exists\ i\in I,\lambda\in\Lambda),(i,t,\lambda)\in S_1\}$，则 V 是 T 的理想．事实上，若$(i,t,\lambda)\in S_1$，对于任意 $a\in T$，有$(i,t,\lambda)(i,p_{\lambda i}^{-1}a,\lambda)=(i,ta,\lambda)\in S_1$，同理$(i,at,\lambda)\in S_1$ 故 $VT\subseteq V$，$TV\subseteq V$．显然 $\mathscr{M}(I,V,\Lambda;\bar{P})\supseteq S_1$．又设$(i,t,\lambda)\in\mathscr{M}(I,V,\Lambda;\bar{P})$，则 $t\in V$．于是存在 $i_1\in I_1,\lambda_1\in\Lambda$，使得$(i_1,t,\lambda_1)\in S_1$．$S_1$ 是理想，有$(i,tt^{-1}p_{\lambda i}^{-1},\lambda)(i_1,t,\lambda_1)(i,p_{\lambda_1 i}^{-1}t^{-1}t,\lambda)=(i,t,\lambda)\in S_1$．故 $\mathscr{M}(I,V,\Lambda;\bar{P})\subseteq S_1$，于是 $S_1=\mathscr{M}(I,V,\Lambda;\bar{P})$． □

讨论 Rees 同余，我们有

引理 5 设 $S=\mathscr{M}(I,V,\Lambda;\bar{P})$，$|I|\neq 1$ 或$|\Lambda|\neq 1$．若 S 是完备半群，则 S 是单半群．

证明 据引理 4，S 是单半群当且仅当 T 是单半群．若 T 不是单半群，设 V 是 T 的真理想，则 S_V 是 S 的真理想．于是 Rees 同余 ρ_{S_V} 是 S 上的完备同余．对于任意$(i,w,\lambda)\in S\backslash S_V$，我们有$(i,w,\lambda)\mathscr{M}(I,V,\Lambda;\bar{P})=\mathscr{M}(I,V,\Lambda;\bar{P})(i,w,\lambda)=\mathscr{M}(I,V,\Lambda;\bar{P})$．因此$|I|=|\Lambda|=1$，这与假设矛盾．故 T 是单半群．从而 S 是单半群．

文献[4]，[5]分别研究了完备有限逆半群，完备交换逆半群，完备 Clifford 半群，它们都是作成半格分解的半格为链，结构映射是满的 Clifford 半群，于是我们易得

定理 2 设 $S=\mathscr{M}(I,V,\Lambda;\bar{P})$，$S$ 不是逆半群．若 T 是有限逆半群（交换逆半群，Clifford 半群），则 S 是完备的当且仅当 S 是完全单半群．

证明 若 S 是完备的，则 T 是完备的，单的逆半群．据上述结论，T 是群．故 S 是完全单半群．反过来的结论据推论 1 得． □

作者衷心感谢郭聿琦教授的悉心指导．

参 考 文 献

[1] J. M. Howie, *An Introduction to Semigroup Theory*, Acdemic Press, London (1976).

[2] F. Pastijn and M. Petrich, *Straight locally inverse semigroups*, Proc. London Math. Soc., 49(1984), 307—328.

[3] J. L. Galbiati and M. L. Veronesi, *Congruences on semigroups which are perfect rectangular bands of inverse semigroups*, Semigroup Forum, 33(1986), 309—330.

[4] H. Hamilton and T. Tamura, *Finite inverse perfect semigroups and their congruences*, J. Austral. Math. Soc., (A), 32(1982), 114—128.

[5] H. Hamilton, *Perfect completely regular semigroups*, Math. Nachr., 123(1985), 169—176.

[6] 汪立民，两类完备的正则半群，数学学报 Vol. 36 No. 3(1993), 388—391.