第14卷第1期
1994年2月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 14 No. 1
Feb. 1994

$K-f$ 环的张量积*

周　伟
(四川师范大学数学系，成都 610068)

引　言

周伯埙证明了左环模的张量积存在且唯一[3]，Martinez 证明了格序群的张量积存在且唯一[4]，这自然就提出一个问题：对于不同格序环上的格序模，又如何定义张量积？当然这首先就需要解决保格多重线性映射(即 l 多重线性映射)的问题．因此本文研究了一类特殊的格序环的张量积，这类环称为 $K-f$ 环，K 是一个有单位元的可换格序环，$K-f$ 环则既是一个 f 环又是一个 $K-$格序模．由 $K-f$ 环 $R_1,R_2,\cdots,R_t$ 作为 $K-$格序模的张量积存在且唯一同时又是一个 $K-$格序模．我们在这个张量积里引入乘法运算，从而证明了这个张量积是一个 $K-$格序环，因此部分解决了上述问题．本文的结果，分别作为格序环和 $K-$格序模，较文[3]。[4]的部分结果更为广泛．

1.　$K-f$ 环

1.1　格序环 R 是一个满足以下条件的环：① R 的加法群是一个 $l-$群，② R 的正锥 $R^+=\{r\in R|r\geqslant 0\}$ 对环 R 的乘法封闭．

设 K 是一个有单位元的可换格序环，格序环 R 称为 $K-$格序环，如果 R 又是一个 $K-$格序模

1.2　f 环 R 是一个满足以下条件的格序环：对任意的 $r,s,t\in R^+$，由 $s\wedge t=0$ 有 $(rs)\wedge t=0$ 且 $(sr)\wedge t=0$.

$K-f$ 环的定义见引言．

1.3　举例

①　整数环 Z 按通常的加法和乘法运算以及数的自然顺序作成一个 f 环，视 Z 为自身上的格序模，则 Z 是一个 Z$-f$ 环．

②　设 $R=\left\{\begin{pmatrix}0 & m\\0 & n\end{pmatrix}\middle| m,n\in Z\right\}$，$R$ 的加法和乘法运算是通常矩阵的加法和乘法．令 $R^+=\left\{\begin{pmatrix}0 & m\\0 & n\end{pmatrix}\middle| m,n\in Z^+\right\}$，则 R 作成一个格序环．

设

* 1991年10月18日收到．

$$\begin{pmatrix}0 & m_1\\0 & n_1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0 & m_2\\0 & n_2\end{pmatrix}=0,\ m_i\geqslant 0, n_i\geqslant 0, i=1,2,$$

则

$$\begin{pmatrix}0 & m_1\wedge m_2\\0 & n_1\wedge n_2\end{pmatrix}=0.$$

因此可以假定 $m_2=0=n_1, m_1>0$ 且 $n_2>0$.

设 $\begin{pmatrix}0 & p\\0 & q\end{pmatrix}\in R^+$,不妨取 $p>0$,则

$$\left[\begin{pmatrix}0 & p\\0 & q\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & n_2\end{pmatrix}\right]\wedge\begin{pmatrix}0 & m_1\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & pn_2\\0 & qn_2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0 & m_1\\0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & pn_2\wedge m_1\\0 & 0\end{pmatrix}>0$$

因此 R 不是 f 环.

但由矩阵的数乘运算知 R 是整数格序环 Z 上的格序模.

③ 有理数加法群 Q 按通常的加法运算和数的自然顺序是一个 Abel l—群,显然按数的乘法运算 Q 是整数格序环 Z 上的格序模,但作为加法群,Q 不是格序环.

因此 $K-f$ 环确实是既别于格序模又异于 f 环的特殊类.

2. $K-f$ 环的张量积

设 K 是有单位元的可换格序环,$R_1,R_2,\cdots,R_p,W$ 是 K—格序环,作为 K—格序模,称 $\theta: R_1\times R_2\times\cdots\times R_p\to W$ 是 $l-p$ 重线性映射,如果对任意的 $r_i, r_{i1}, r_{i2}\in R_i$, $i=1,2,\cdots,p$. $k\in K$ 有

① $(r_1,\cdots,r_{t-1},r_{t1}+r_{t2},r_{t+1},\cdots,r_p)\theta$

$=(r_1,\cdots,r_{t-1},r_{t1},r_{t+1},\cdots,r_p)\theta+(r_1,\cdots,r_{t-1},r_{t2},r_{t+1},\cdots,r_p)\theta\quad t=1,2,\cdots,p.$

② $(r_1,\cdots,kr_i,\cdots,r_j,\cdots,r_p)\theta$

$=k(r_1,\cdots,r_i,\cdots,r_j,\cdots,r_p)\theta=(r_1,\cdots,r_i,\cdots,kr_j,\cdots,r_p)\theta\quad i,j=1,2,\cdots,p.$

③ $(r_1,\cdots,r_{i-1},\cdot,r_{i+1},\cdots,r_p)\theta$ 是 l—映射,$r_j\in R_j^+$, $1\leqslant j\leqslant i-1$, $i+1\leqslant j\leqslant p$, $i=1,2,\cdots,p$.

$R_1,R_2,\cdots,R_p$ 的张量积(记为 $R_1\otimes R_2\otimes\cdots\otimes R_p$)是一个 K—格序模 R 和一个 $l-p$ 重线性映射 $\eta: R_1\times R_2\times\cdots\times R_p\to R$,满足条件:对任意的 K—格序模 T 和 $l-p$ 重线性映射 $\theta: R_1\times R_2\times\cdots\times R_p\to T$,存在唯一的 l—同态 $\theta^*: R\to T$ 使得 $\theta=\eta\theta^*$.

显然这种张量积的存在性即意味着唯一性.

仿[5]定理 1 和定理 2 可证

引理 2.1 K—格序环 $R_1,R_2,\cdots,R_p$ 的张量积存在且唯一.

引理 2.2[6] 设 K 是有单位元的可换格序环,R_1,R_1',R_2,R_2' 是 K—格序环,如果 $\varphi: R_1\to R_1'$, $\psi: R_2\to R_2'$ 是 l—模同态,则存在唯一的 l—模同态 $\pi=\varphi\otimes\psi: R_1\otimes R_2\to R_1'\otimes R_2'$. 由 $r_1\otimes r_2\to r_1\varphi\otimes r_2\psi$ 决定,这里 $r_i\in R_i$, $i=1,2$ 是任意元.

引理 2.3[6] 设 K 是有单位元的可换格序环,R_1,R_2 是 $K-f$ 环,则 R_1 与 R_2(作为 K—格序模)的张量积在 l—同构意义下可换,即 $R_1\otimes R_2=R_2\otimes R_1$.

引理 2.4 设 K 是有单位元的可换格序环,R_1,R_2,R_3 是 $K-f$ 环,则在 l—同构意义下有

$$(R_1 \otimes R_2) \otimes R_3 = R_1 \otimes (R_2 \otimes R_3).$$

证明 令 $\theta:(R_1\otimes R_2)\times R_3\to R_1\otimes(R_2\otimes R_3)$. 由 $(r_1\otimes r_2,r_3)\theta=r_1\otimes(r_2\otimes r_3)$ 决定，作为 K—模，由文[3]命题2.1知 $r_1\otimes(r_2\otimes r_3)=(r_1\otimes r_2)\otimes r_3$，于是 $(r_1\otimes r_2,r_3)\theta=(r_1\otimes r_2)\otimes r_3$. 现证 θ 是 l—双线性映射. 对于条件①和②，θ 显然是满足的，设 $r_1\otimes r_2,r'_1\otimes r'_2\in R_1\otimes R_2,r_3\in R_3^+$，这里 $r_i\in R_i,r'_i\in R_i\, i=1,2$，则

$$\begin{aligned}((r_1\otimes r_2)\vee(r'_1\otimes r'_2),r_3)\theta &= [(r_1\otimes r_2)\vee(r'_1\otimes r'_2)]\otimes r_3\\ &= [(r_1\otimes r_2)\otimes r_3]\vee[(r'_1\otimes r'_2\otimes r_3]=(r_1\otimes r_2,r_3)\theta\vee(r'_1\otimes r'_2,r_3)\theta,\end{aligned}$$

设 $r_1\otimes r_2\in(R_1\otimes R_2)^+,r_3,r'_3\in R_3$，这里 $r_i\in R_i,i=1,2$. 则

$$\begin{aligned}(r_1\otimes r_2,r_3\vee r'_3)\theta &= (r_1\otimes r_2)\otimes(r_3\vee r'_3)=[(r_1\otimes r_2)\otimes r_3)\vee[(r_1\otimes r_2)\otimes r'_3]\\ &= (r_1\otimes r_2,r_3)\theta\vee(r_1\otimes r_2,r_3)\theta,\end{aligned}$$

因此 θ 是 l—双线性映射，则由张量积定义知存在唯一的 l—同态 $\theta^*:(R_1\otimes R_2)\otimes R_3\to R_1\otimes(R_2\otimes R_3)$. 令 $\varphi:R_1\times(R_2\otimes R_3)\to(R_1\otimes R_2)\otimes R_3$，由 $(r_1,r_2\otimes r_3)\varphi=(r_1\otimes r_2)\otimes r_3$ 决定，同理于以上证明知 φ 是 l—双线性映射，则由张量积定义知存在唯一的 l—同态 $\varphi^*:R_1\otimes(R_2\otimes R_3)\to(R_1\otimes R_2)\otimes R_3$. 于是由 θ^*,φ^* 的唯一性知

$$\theta^*\varphi^* = 1_{(R_1\otimes R_2)\otimes R_3},\varphi^*\theta^* = 1_{R_1\otimes(R_2\otimes R_3)},$$

因此 θ^*,φ^* 都是 l—同构，故结论成立. 证毕.

定理2.5 设 $R_1,R_2,\cdots,R_p$ 是 K—格序环，$i_1,i_2,\cdots,i_p$ 是 $1,2,\cdots,p$ 的任一个排列，$1\leqslant q<p$，则在 l—同构意义下有 $\bigotimes_1^p R_i=(\bigotimes_{j=1}^q R_{i_j})\otimes(\bigotimes_{j=q+1}^p R_{i_j})$.

由引理2.1，2.3和2.4直接可证此定理.

注意 这里不能直接用定义来证，因为 l 双线性映射的保格问题不能解决.

由定理2.5知

$$(R_1\otimes R_2\otimes\cdots\otimes R_p)\otimes(R_1\otimes R_2\otimes\cdots\otimes R_p)=(R_1\otimes R_1)\otimes(R_2\otimes R_2)\otimes\cdots\otimes(R_p\otimes R_p).$$

引理2.6 设 $R_1,R_2,\cdots,R_p$ 是 K—格序环，则存在唯一的 l—同态

$$f:(\bigotimes_1^p R_i)\otimes(\bigotimes_1^p R_i)\to\bigotimes_1^p R_i.$$

证明 对任意的 $i,1\leqslant i\leqslant p$，令 $\tau_i:R_i\times R_i\to R_i$ 由 $(u,v)\tau_i=uv\in R_i$ 决定，这里 $u,v\in R_i$，则 τ_i 满足条件：

① 设 $u_j,v_j\in R_i,\ j=1,2$，则

$$\begin{aligned}(u_1+u_2,v_1+v_2)\tau_i &= (u_1+u_2)(v_1+v_2)=u_1v_1+u_1v_2+u_2v_1+u_2v_2\\ &= (u_1,v_1)\tau_i+(u_1,v_2)\tau_i+(u_2,v_1)\tau_i+(u_2,v_2)\tau_i.\end{aligned}$$

② 设 $u,v\in R_i,k\in K$，则

$$(ku,v)\tau_i=(ku)v=k(uv)=(ku)v=(uk)v=u(kv),$$

即 $(ku,v)\tau_i=k(u,v)\tau_i=(u,kv)\tau_i$.

③ 设 $u\in R_i^+,v_1,v_2\in R_i$，因为 R_i 是 f 环，则 R_i 也是自身上的 f—模，因此由文[7]定理1有 $(u,v_1\vee v_2)\tau_i=u(v_1\vee v_2)=(uv_1)\vee(uv_2)=(u,v_1)\tau_i\vee(u,v_2)\tau_i$. 同理设 $u_1,u_2\in R_i,v\in R_i^+$，则 $(u_1\vee u_2,v)\tau_i=(u_1\vee u_2)v=(u_1v)\vee(u_2v)=(u_1,v)\tau_i\vee(u_2,v)\tau_i$，因此对 $u,v\in R_i^+$，$(u,\cdot)\tau_i$ 与 $(\cdot,v)\tau_i$ 都是 l—映射.

综上知 τ_i 是 l—双线性映射，因此由张量积定义知存在唯一的 l—同态 $f_i:R_i\otimes R_i\to R_i$，由

$(r_{i1}\otimes r_{i2})f_i=r_{i1}\cdot r_{i2}$ 决定，$1\leqslant i\leqslant p$.

因 f_i 是 l—同态，则对 $r_{i1}\geqslant 0, r_{i2}\geqslant 0$，由 $(r_{i1}\otimes r_{i2})f=r_{i1}\cdot r_{i2}\geqslant 0$ 知 $r_{i1}\otimes r_{i2}\geqslant 0$，即 R_i 中任意两个正元的张量积是正元.

令 $f=f_1\otimes f_2\otimes\cdots\otimes f_p:\bigotimes\limits_1(R_i\otimes R_i)\to\bigotimes\limits_1 R_i$，由 $(r_{11}\otimes r_{12})\otimes(r_{21}\otimes r_{22})\otimes\cdots\otimes(r_{p1}\otimes r_{p2})\to(r_{11}r_{12})\otimes(r_{21}r_{22})\otimes\cdots\otimes(r_{p1}r_{p2})$ 决定，由引理 2.2 不难证明 f 是 l—同态.

定理 2.7　$\bigotimes\limits_1 R_i$ 是一个 K—格序环，当 R_i 有单位元时，$1\leqslant i\leqslant p$，$\bigotimes\limits_1 R_i$ 是一个有单位元的 K—格序环. 当 R_i 可换时，$1\leqslant i\leqslant p$，$\bigotimes\limits_1 R_i$ 是一个可换 K—格序环.

证明　由引理 2.6 知存在 l—同态 $f:(\bigotimes\limits_1 R_i)\otimes(\bigotimes\limits_1 R_i)\to\bigotimes\limits_1 R_i$，由此我们在 $\bigotimes\limits_1 R_i$ 中定义乘法运算"$\circ$"：对任意的 $x,y\in\bigotimes\limits_1 R_i$，$x\circ y=(x\otimes y)f$，由 f 是 l—同态(首先是映射)知"$\circ$"是 $\bigotimes\limits_1 R_i$ 的一个乘法运算.

由于 $\bigotimes\limits_1 R_i$ 是一个 K—格序模，因此 $\bigotimes\limits_1 R_i$ 本身是一个加法 Abel l—群，加法运算记为"+".

设 $x,y,z\in\bigotimes\limits_1 R_i$，令 $x=r_1\otimes r_2\otimes\cdots\otimes r_p$，$y=r_1'\otimes r_2'\otimes\cdots\otimes r_p'$，$z=r_1''\otimes r_2''\otimes\cdots\otimes r_p''$，则

$$\begin{aligned}(x\circ y)\circ z&=[(x\otimes y)f]\circ z=[(r_1r_1')\otimes(r_2r_2')\otimes\cdots\otimes(r_pr_p')]\circ z\\&=([(r_1r_1')\otimes(r_2r_2')\otimes\cdots\otimes(r_pr_p')]\otimes z)f\\&=(r_1r_1')r_1''\otimes(r_2r_2')r_2''\otimes\cdots\otimes(r_pr_p')r_p''\\&=r_1(r_1'r_1'')\otimes r_2(r_2'r_2'')\otimes\cdots\otimes r_p(r_p'r_p'')\\&=x\circ[(y\otimes z)f]=x\circ(y\circ z),\end{aligned}$$

即乘法满足结合律. 又

$$\begin{aligned}x\circ(y+z)&=(x\otimes(y+z))f=(x\otimes y+x\otimes z)f=(x\otimes y)f+(x\otimes z)f\\&=x\circ y+x\circ z,\end{aligned}$$

同理 $(x+y)\circ z=x\circ z+y\circ z$，因此乘法对加法满足分配律. 所以 $\bigotimes\limits_1 R_i$ 关于运算"+"和"$\circ$"是一个环.

现设 $\bigotimes\limits_1 R_i$ 的 Abel 加法 l—群的正锥为 $P=\{x\in\bigotimes\limits_1 R_i\mid x\geqslant 0\}$，对任意 $x,y\in P$ 有 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$，于是由引理 2.6 证明知 $x\otimes y\geqslant 0$，而 f 是 l—同态，因而是保序的，所以 $x\circ y=(x\otimes y)f\geqslant 0$，即 P 关于 $\bigotimes\limits_1 R_i$ 的乘法运算封闭，因此，$\bigotimes\limits_1 R_i$ 是以 P 为正锥的格序环.

如果 R_i 有单位元 I_i，$1\leqslant i\leqslant p$，则显然 $I_1\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_p$ 是 $\bigotimes\limits_1 R_i$ 的单位元，因此 $\bigotimes\limits_1 R_i$ 是有单位元的 K—格序环.

当 R_i 是可换 f 环时，$1\leqslant i\leqslant p$，有

$$\begin{aligned}x\circ y&=(x\otimes y)f=((r_1\otimes r_2\otimes\cdots\otimes r_p)\otimes(r_1'\otimes r_2'\otimes\cdots\otimes r_p'))f\\&=(r_1r_1')\otimes(r_2r_2')\otimes\cdots\otimes(r_pr_p')=(r_1'r_1)\otimes(r_2'r_2)\otimes\cdots\otimes(r_p'r_p)\\&=((r_1'\otimes r_2'\otimes\cdots\otimes r_p')\otimes(r_1\otimes r_2\otimes\cdots\otimes r_p))f=(y\otimes x)f\\&=y\circ x.\end{aligned}$$

因此$\bigotimes_i R_i$是可换 K－格序环．证毕．

至此我们证明了 $K-f$ 环的张量积是一个 K－格序环，然而这个张量积在何条件下是一个 f 环？类似的问题还有 K－左 f 环（右 f 环）的张量积在何条件下是一个 K－左 f 环（右 f 环）或 f 环等．这些问题都有待进一步研究．

参 考 文 献

[1] M. Marcus, Finite Dim. Mult. Alg. (1973).

[2] 周伯埙，同调代数，科学出版社，1988.

[3] 周伯埙，南京大学学报，1(1979)，1—20.

[4] J. Martinez, Pacific J. Math., 41(1972), 771—789.

[5] 周 伟，南京师大学报，2(1991)，14—18.

[6] 周 伟，四川师大学报，3(1992)，52—57.

[7] A. Bigard, Pacific J. Math., 49(1973), 1—6.

Tensor Products of $K-f$ Rings

Zhou Wei

(Dept. of Math., Sichuan Normal Univ., Chengdu)

Abstract

A multiplication is introduced into the tensor products of K－lattice ordered modules, where K is a commutative lattice ordered ring with identity. It is shown that the positive cone of the Abelian l－group of the tensor products is closed under this multiplication and that the tensor products of $K-f$ rings is a K－lattice ordered ring.