第14卷第1期 数学研究与评论 Vol. 14 No. 1
1994年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1994

集值映射的不动点指数及其在变分不等式中的应用*

张石生 张从军
(四川大学数学系,成都610064) (淮北煤师院数学系,安徽235000)

摘要 本文利用Cellina和Lasota关于集值映射的拓扑度定义了一类集值映射的不动点指数,讨论了它的有关性质.作为应用的例子,我们获得了一类变分不等式解的存在性定理.

一、预备知识

本文中E表示实Banach空间,$\overline{\Omega}$表示$\Omega\subset E$的闭包,$\partial\Omega$表示Ω的边界,$\overline{\mathrm{co}}(\Omega)$表示$\Omega$的闭凸包.$E^*$为$E$的共轭空间,对$x\in E,f\in E^*$,记$(f,x)=f(x)$.

定义1.1 设M是拓扑空间,$D\subset M$,若存在连续算子$r:M\to D$,使当$x\in D$时,$rx=x$,则称D是M的一个收缩核,算子r是一个保核收缩.

引理1.1(见[5]) 实Banach空间E中任何非空闭凸集D都是E的收缩核.

引理1.2(见[2]) 设X是E的闭子集,$T:X\to 2^E$是具闭凸值的上半连续映射.则对$\forall\ \varepsilon>0$,存在定义在X上的单值连续映射T_ε,满足:

(1) 对$\forall\ x\in X$,$\exists\ y\in X,z\in T(y)$,使$\|y-x\|<\varepsilon,\|z-T_\varepsilon x\|<\varepsilon$;

(2) 设T和T_ε的值域分别是$R(T)$与$R(T_\varepsilon)$,则可适当选择T_ε,使$R(T_\varepsilon)\subset\overline{\mathrm{co}}R(T)$;

(3) 若T是紧映射,则T_ε也是紧的.

定义1.2 设Ω是E中的有界开集,$f:\overline{\Omega}\to 2^E$是具闭凸值的紧映射,$I$是恒等映射,$\Phi=I-f$.选取定义在$\overline{\Omega}$上的单值紧映射序列$\{f_n\}$,使$f_n\to f(n\to\infty)$且$f_n$的值域包含在$\overline{\mathrm{co}}f(\overline{\Omega})$中,$(n=1,2,\cdots)$定义

$$\deg(\Phi,\Omega,P)=\lim_{n\to\infty}\deg(\Phi_n,\Omega,P),$$

其中$\Phi_n=I-f_n$,$P\overline{\in}\Phi(\partial\Omega)$,$\deg(\Phi_n,\Omega,P)$是Leary-Schauder度(见[1]).

以下称定义1.2中的拓扑度为Cellina-Lasota度,或简称为C-L度.可以证明,C-L度具有Leary-Schauder度的通常性质,如可解性、同伦不变性、可加性、正规性、切除性等(见[1],[2]).

定义1.3 映射$A:X\to E^*$称为在E的有限维子空间上连续,如果A限制在X与E上的任何有限维子空间之交上是弱连续的.

二、集值映射的不动点指数

* 1991年12月10日收到.93年6月28日收到修改稿.国家自然科学基金,国家科委和煤炭部优秀青年科学基金资助课题.

定义 2.1 设 X 是实 Banach 空间 E 中的非空闭凸集，Ω 是 X 中的有界开集，$F:\overline{\Omega}\to 2^X$ 是具闭凸值的紧映射且在 $\partial\Omega$ 上没有不动点，$r:E\to X$ 是一个保核收缩．取 R 充分大，使 E 中的开球 $T_R=\{x\in E,\|x\|<R\}$ 包含 $\overline{\Omega}$．定义 F 在 Ω 上关于 X 的不动点指数为

(1) $$i(F,\Omega,X)=\deg(I-F\cdot r,T_R\cap r^{-1}(\Omega),\theta),$$

其中 I 是 E 中的恒等算子，(1)式右端是 C－L 度．

以下证明(1)式右端的 C－L 度有意义，它不随 r 和 R 的选取而改变．

证明 因为 $F\cdot r:r^{-1}(\overline{\Omega})\to 2^X$ 的不动点皆属于 Ω 且为 F 的不动点，$T_R\cap r^{-1}(\Omega)$ 是 E 中的有界开集，所以 $F\cdot r$ 在 $\partial(T_R\cap r^{-1}(\Omega))$ 上没有不动点．又因 $F\cdot r$ 是具闭凸值的紧映射，且

$$\theta\overline{\in}(I-F\cdot r)(\partial(T_R\cap r^{-1}(\Omega))),$$

故(1)式右端的 C－L 度有意义．

设 $R_1>R$，因为 $\Omega\subset T_R\cap r^{-1}(\Omega)\subset T_{R_1}\subset r^{-1}(\Omega)$，故 $F\cdot r$ 在 $\overline{T_{R_1}\cap r^{-1}(\Omega)}\setminus(T_R\cap r^{-1}(\Omega))$ 上没有不动点，由 C－L 度的切除性有

(2) $$\deg(I-F\cdot r,T_{R_1}\cap r^{-1}(\Omega),\theta)=\deg(I-F\cdot r,T_R\cap r^{-1}(\Omega),\theta).$$

若 $r_1:E\to X$ 是另一保核收缩，令

$$V=T_R\cap r^{-1}(\Omega)\cap r_1^{-1}(\Omega),$$

则 V 是 E 中的有界开集且 $V\subset T_R\cap r^{-1}(\Omega)$，$V\subset T_R\cap r_1^{-1}(\Omega)$，$V\supset\Omega$．而 $F\cdot r$ 在 $\overline{T_R\cap r^{-1}(\Omega)}\setminus V$ 上，$F\cdot r_1$ 在 $\overline{T_R\cap r_1^{-1}(\Omega)}\setminus V$ 上都没有不动点，于是有

(3) $$\deg(I-F\cdot r,T_R\cap r^{-1}(\Omega),\theta)=\deg(I-F\cdot r,V,\theta),$$

(4) $$\deg(I-F\cdot r_1,T_R\cap r_1^{-1}(\Omega),\theta)=\deg(I-F\cdot r,V,\theta).$$

令 $H(t,x)=tF\cdot r(x)+(1-t)F\cdot r_1(x)$，则 $H:[0,1]\times\overline{V}\to 2^X$ 是具非空闭凸值的紧映射．易知，当 $(t,x)\in[0,1]\times\partial V$ 时，必有 $x\overline{\in}H(t,x)$；当 $x\in V$ 时有

$$H(0,x)=F\cdot r_1(x),\quad H(1,x)=F\cdot r(x).$$

由 C－L 度的同伦不变性得

(5) $$\deg(I-F\cdot r_1,V,\theta)=\deg(I-F\cdot r,V,\theta).$$

结合(3)，(4)，(5)式即得

(6) $$\deg(I-F\cdot r_1,T_R\cap r_1^{-1}(\Omega),\theta)=\deg(I-F\cdot r,T_R\cap r^{-1}(\Omega),\theta).$$

(2)，(6)两式表明，(1)式右端的 C－L 度不随 r 和 R 的选取而改变，因此(1)式左端的不动点指数 $i(F,\Omega,X)$ 是由 F,Ω,X 唯一确定的．

定理 2.1 集值映射的不动点指数 $i(F,\Omega,X)$ 具有如下性质：

1．(正规性) 设 $F:\overline{\Omega}\to\Omega$，对 $\forall x\in\overline{\Omega}$，$F(x)=\{x_0\}$，$x_0\in\Omega$，则 $i(F,\Omega,X)=1$；

2．(可加性) 设 Ω_1 与 Ω_2 是 Ω 的互不相交开子集(关于 X)，F 在 $\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)$ 上没有不动点，则

$$i(F,\Omega,X)=i(F,\Omega_1,X)+i(F,\Omega_2,X),$$

这里 $i(F,\Omega_k,X)=i(F|_{\overline{\Omega}_k},\Omega_k,X)$，$k=1,2$；

3．(同伦不变性) 设 $H:[0,1]\times\overline{\Omega}\to 2^X$ 是具闭凸值的紧映射，当 $(t,x)\in[0,1]\times\partial\Omega$ 时，$x\overline{\in}H(t,x)$，则 $i(H(t,\cdot),\Omega,X)$ 与 t 无关．

4．(切除性) 若 V 是关于 X 的开集，$V\subset\Omega$，F 在 $\overline{\Omega}\setminus V$ 上没有不动点，则 $i(F,\Omega,X)=i(F,$

$V,X)$.

5.（保持性） 设 Y 是 X 中的非空闭凸集，$F(\Omega)\subset Y$，则 $i(F,\Omega,X)=i(F,\Omega\cap Y,Y)$，其中 $i(F,\Omega\cap Y,Y)=i(F|_{\overline{\Omega\cap Y}},\Omega\cap Y,Y)$.

6.（可解性） 若 $i(F,\Omega,X)\neq 0$，则 F 在 Ω 中至少有一个不动点.

证明 性质1,2,3,4可利用C—L度的相应性质直接证明，性质6由性质4立得，为节省篇幅，此处均从略. 以下仅证性质5.

设 $r_1:X\to Y$ 是保核收缩，则 $r_1\cdot r:E\to Y$ 也是保核收缩，由定义2.1，

(7) $$i(F,\Omega,X)=\deg(I-F\cdot r,T_R\cap r^{-1}(\Omega),\theta),$$

(8) $$i(F,\Omega\cap Y,Y)=\deg(I-F\cdot r_1\cdot r,T_R\cap(r_1\cdot r)^{-1}(\Omega\cap Y),\theta).$$

令 $V=T_R\cap r^{-1}(\Omega)\cap[(r_1\cdot r)^{-1}(\Omega\cap Y)]$，则 V 是 E 中的有界开集，$F\cdot r$ 在 $\overline{T_R\cap r^{-1}(\Omega)}\setminus V$ 上没有不动点. 由C—L度的切除性，

(9) $$\deg(I-F\cdot r,T_R\cap r^{-1}(\Omega),\theta)=\deg(I-F\cdot r,V,\theta).$$

同理可得

(10) $$\deg(I-F\cdot r_1\cdot r,T_R\cap(r_1\cdot r)^{-1}(\Omega\cap Y),\theta)=\deg(I-F\cdot r_1\cdot r,V,\theta).$$

令 $H:[0,1]\times\overline{V}\to 2^V$，$H(t,x)=tF\cdot r(x)+(1-t)F\cdot r_1\cdot r(x)$，则 H 是具非空闭凸值的紧映射，当 $(t,x)\in[0,1]\times\partial V$ 时，$x\overline{\in}H(t,x)$. $H(0,x)=F\cdot r_1\cdot r(x)$，$H(1,x)=F\cdot r(x)$. 由C—L度的同伦不变性

(11) $$\deg(I-F\cdot r,V,\theta)=\deg(I-F\cdot r_1\cdot r,V,\theta).$$

结合(7)，(8)，(9)，(10)，(11)诸式得

$$i(F,\Omega,X)=i(F,\Omega\cap Y,Y).$$

本节推广了[2]中的全部相应结果. 利用这里建立的不动点指数，可以获得一些集值映射的不动点定理. 下面给出它对一类集值变分不等式的应用.

三、不动点指数对一类变分不等式的应用

设 E 是实自反的Banach空间，X 是 E 的非空闭凸集，Ω 是 X 中的有界开集. $A:X\to E^*$，$F:X\to 2^{E^*}$. 考虑如下变分不等式问题：

(1) 要找 $u_0\in X,g\in F(u_0)$ 使 $(Au_0,v-u_0)\geqslant(g,v-u_0)$ 对 $\forall\ v\in X$ 成立.

引理3.1 设 A 在 E 的有限维子空间上连续，且存在两个常数 $\alpha>0,p>1$，使

(2) $$(Au-Av,u-v)\geqslant\alpha\|u-v\|^p\quad\forall\ u,v\in X,$$

则对每个 $q\in E^*$，变分不等式

$$(Au,v-u)\geqslant(q,v-u)\quad\forall\ v\in X$$

有唯一解 $u=K_A(q)\in X$，其中映射 $K_A:E^*\to X$ 是连续的和有界的(见[4]).

定理3.1 设 A 在 E 的有限维子空间上连续，且满足(2)式，$K_AF:\overline{\Omega}\to 2^X$ 是具闭凸值的紧映射，在 $\partial\Omega$ 上没有不动点；又没存在 $\bar{x}\in\Omega$，使

(3) $$\frac{x-(1-t)\bar{x}}{t}\overline{\in}F(x),\quad x\in\partial\Omega,t\in(0,1),$$

则(1)在 Ω 中必有解.

证明 由题设条件，$i(K_A F,\Omega,X)$有意义. 令 $H(t,x)=tK_A F(x)+(1-t)G(x)$，其中 $G:\bar{\Omega}\to\Omega$，$G(x)\equiv\bar{x}$，$x\in\bar{\Omega}$，$\bar{x}\in\Omega$，则 $H:[0,1]\times\bar{\Omega}\to 2^X$ 是具闭凸值的紧映射且当$(t,x)\in[0,1]\times\partial\Omega$时，$x\bar{\in} H(t,x)$.

事实上，若有 $t_0\in[0,1]$，$x_0\in\partial\Omega$，使 $x_0\in H(t_0,x)$，即有

$$x_0\in t_0K_A F(x_0)+(1-t_0)\bar{x}. \tag{4}$$

若 $0<t_0<1$，由(4)式得$[x_0-(1-t_0)\bar{x}]/t_0\in F(x_0)$这与(3)矛盾；若 $t_0=0$，则 $x_0=\bar{x}\in\Omega$，这与 $x_0\in\partial\Omega$ 矛盾；若 $t_0=1$，则 $x_0\in K_A F(x_0)$，这与 $K_A F$ 在 $\partial\Omega$ 上没有不动点矛盾.

由定理 2.1 中的同伦不变性和正规性得

$$i(K_A F,\Omega,X)=i(G,\Omega,X)=1.$$

再由定理 2.1 中的可解性，$K_A F$ 在 Ω 中必有不动点.

设 $u_0\in K_A F(u_0)$，$u_0\in\Omega$. 则 $u_0=K_A(g)$，$g\in F(u_0)$，于是 u_0 是变分不等式$(Au,v-u)\geqslant(g,v-u)$，$\forall\ v\in X$ 的唯一解. 故存在 $u_0\in X$，$g\in F(u_0)$使$(Au_0,v-u_0)\geqslant(g,v-u_0)$对$\forall\ v\in X$ 成立.

参 考 文 献

[1] A. Cellina and A. Losota, *A new approach to the definition of topological degree for multivalued mappings*, Atti Acad. Nat. Lincei Rend. cl. sci. Fis. Mat. Natur.. 47(1969)8, 434—440.

[2] N. G. Lloyd, *Degree theory*, Cambridge. Univ. Press, 1978. 115—120.

[3] H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, SIAM Review, 18 (1976), 620—709.

[4] Andrzej Szulkin, *Positive solutions of variational inequalities: A degree—theoretic approach*, Journal of Differential Equations 57(1985), 90—111.

[5] 郭大钧，非线性泛函分析，山东科技出版社，1985.

Fixed Point Index of Set-Valued Mappings with Application on Variational Inequalities

Zhang Shisheng

(Dept. of Math., Sichuan Univ., Chengdu)

Zhang Congjun

(Huaibei Coal Teacher's College)

Abstract

Using cellina and Lasota's topological degree for set-valued mappings, we establish fixed point index of set-valued mappings and discuss their properties. As an example in applications, we study generalized variational inequality problem.