第14卷第1期 数学研究与评论 Vol. 14 No. 1
1994年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1994

非线性椭圆型Haseman边值问题*

李生训
（河北轻化工学院基础部，石家庄 050018）

黄 沙
（河北师范大学数学系，石家庄 050016）

摘要 本文首先给出多个未知复函数的非线性椭圆型复方程组的非线性Haseman边值问题解的估计式，然后使用Leray—Schauder定理讨论上述问题的可解性.

1. 问题的提法

设 D^+ 为平面 E 上有界 $N+1$ 连通区域，其边界 Γ 是 $N+1$ 条约当闭曲线，且 $\Gamma\in C_\beta^1$ $(0<\beta<1)$. 不妨设 $z=0\in D^+$, $z=1\in\Gamma$. 记 $D^-=E\backslash D^+$. 又设 E_R: $|z|\leqslant R$（R 足够大），且记 $D_R^+=D^+\cap E_R$, $D_R^-=D^-\cap E_R$, $D_R=D_R^+\cup D_R^-$. 考虑 $D^\pm$ 上一阶非线性复方程组：

$$w_{\bar z}=F(z,w,w_z),\quad F=Qw_z+A^{(1)}w+A^{(2)}\overline{w}+A^{(3)},\tag{1.1}$$

其中 $w=(w_1,\cdots,w_n)^T$; $F=(F_1,\cdots,F_n)^T$; $Q=(Q_{kl}(z,w,w_z))_{n\times n}$; $A^{(j)}=(A_{kl}^{(j)}(z,w))_{n\times n}$; $A^{(3)}=(A_1^{(3)}(z,w),\cdots,A_n^{(3)}(z,w))^T$; $z=x+iy$; $w_k=u_k+iv_k$; $j=1,2$, $k=1,\cdots,n$.

设(1.1)满足条件 C，即

(1) $Q_{kl}(z,w,v)$, $A_{kl}^{(j)}(z,w)$, $A_k^{(3)}(z,w)$ 对几乎所有 $z\in D_R^\pm$ 与 $v\in C^n$（n 重积空间）关于 $w\in C^n$ 连续，且当 $z\notin\overline{D}_R$ 时 $Q_{kl}=0$, $A^{(j)}=0$ $(1\leqslant j\leqslant 3, 1\leqslant k,l\leqslant n)$.

(2) 对于 $\overline{D}_R^\pm$ 上任意的函数向量 $w(z)\in C_\beta(D_R^\pm)$, $v(t)\in L_{p_0}(\overline{D}_R^\pm)$ $(\beta=1-\dfrac{2}{p_0}, 2<p_0<p)$，函数 $Q_{kl}(z,w(z),v(z))$, $A_{kl}^{(j)}(z,w(z))$, $A_k^{(3)}(z,w(z))$ 在 D_R 内可测，且满足条件：

$$\begin{aligned}&L_p[A_{kl}^{(j)}(z,w(z)),\overline{D}_R]\leqslant d_{kl}\leqslant d;\\&L_p[A_k^{(j)}(z,w(z)),\overline{D}_R]\leqslant d_k\leqslant d;\\&d_{kl}\leqslant\varepsilon,\ 1\leqslant k<l\leqslant n.\end{aligned}\tag{1.2}$$

(3) 对几乎所有 $z\in D_R^\pm$, $w\in C^n$, $v^{(1)},v^{(2)}\in C^n$，复方程组(1.1)满足一致椭圆型条件：

$$|F_k(z,w,v^{(1)})-F_k(z,w,v^{(2)})|\leqslant\sum_{l=1}^n q_{kl}|v_l^{(1)}-v_l^{(2)}|,\tag{1.3}$$

其中非负常数 q_{kl} 满足：

$$\sum_{l=1}^n q_{kl}\leqslant q_0<\frac{1}{n}\ (1\leqslant k\leqslant n);\ q_{kl}\leqslant\varepsilon<1,1\leqslant k<l\leqslant n.$$

问题H 求满足条件 C 的复方程组(1.1)于 $D^\pm$ 上的分片广义解向量 $w^\pm(z)$，使在 Γ 上满足非线性Haseman边界条件：

* 1991年8月16日收到. 河北省自然科学资助项目.

$$w^+[a(t)]=G(t)w^-(t)+g(t,w^+,w^-),\ t\in\Gamma, \tag{1.4}$$

其中 $a(t)$ 是将 $\Gamma_j\,(j=0,1,\cdots,N)$ 保持方向、同胚映射到自身的函数向量，$C_\beta^1[a(t),\Gamma]\leqslant d$，$a_t'(t)\neq 0$；$\det G(t)\neq 0$，不妨设

$$G(t)=\begin{pmatrix} G_1(t) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & G_2(t) & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & G_n(t)\end{pmatrix}\quad (G_k(t)\neq 0).$$

并设 $C_v[G(t),\Gamma]\leqslant d$，$\frac{1}{2}<v<1$；$g(t,w^+,w^-)$ 在 Γ 上满足：

$$\begin{aligned} &C_\sigma[g(t,0,0),\Gamma]\leqslant d,\\ &C_\sigma[g(t,w^{(1)+},w^{(1)-})-g(t,w^{(2)+},w^{(2)-}),\Gamma]\\ &\quad\leqslant \varepsilon\{C_\beta[w^{(1)+}-w^{(2)+}),\Gamma]+C_\beta[w^{(1)+}-w^{(2)-}),\Gamma]\},\end{aligned} \tag{1.5}$$

其中 $\beta=1-\frac{2}{p_0}$，$2<p_0<\min\{p,\frac{1}{1-v}\}$，$0<\varepsilon<+\infty$，$\sigma$ 表示 v 及 β.

$$L_{p_0}[\Psi'^{(1)}-\Psi'^{(2)},\overline{D}_R]\leqslant \varepsilon\{L_{p_0}[(J^{(1)}-J^{(2)})_{\bar z}+|J^{(1)}-J^{(2)})_z|,\overline{D}_R]\}, \tag{1.6}$$

这里 $J^{(j)}\in C_\beta(\overline{D}_R^\pm)\cap W_{p_0}^1(D_R)$，且 $\Psi'^{(j)}(z)=pg(z,J^{(j)+},J^{(j)-})$ 为满足边界条件

$$w^+[t]=G(t)w^-(t)+g(t,J^{(j)+},J^{(j)-})\quad (t\in\Gamma) \tag{1.7}$$

的分片解析函数向量.

此外，$w^\pm(z)$ 还要求当

$$K_k=\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma\arg G_k(t)\ (k=1,2,\cdots,n) \tag{1.8}$$

非负时满足

$$w_k^-(z_j)=a_{k_j}+ib_{k_j}\,(j=1,\cdots,n),\ w_k^-(\infty)=0\ (k=1,\cdots,n), \tag{1.9}$$

其中 z_j 为 D_R^- 内有限个点，不妨设 $|z_j|>R$，$a_{k_j}+ib_{k_j}$ 为复常数；而当 $K_k<0$ 时，则从 $w_k^-(z)=0(|z|^{-K_k})\ (z\to\infty)$ 代替(1.9).

特别，当 $a(t)=t$ 时的问题 H 即为(1.1)的 Riemann 边值问题，记作问题 R. 又记当 $n=1$ 时问题 H 为问题 H_0.

2. 问题 H 解的先验估计

由文[1]可知，若(1.5)及(1.6)中的 ε 适当小，则问题 H_0 的解 $w(z)$ 满足估计式

$$\begin{aligned} S(w(z),\overline{D}_R^\pm)&=C_\beta[w(t),\overline{D}_R^\pm]+L_{p_0}[|w_{\bar z}|+|w_z|,\overline{D}_R]<M\\ &\equiv M(q_0,p_0,D_R,v,d,a(t)).\end{aligned} \tag{2.1}$$

又若 $(1.1)_0$（$n=1$ 时的(1.1)）的条件 C_0（$n=1$ 时的条件 C）中的 $L_p[A^{(3)},\overline{D}_R]\leqslant d$ 代以 $L_{p_0}[A,\overline{D}_R]\leqslant d_0$，边界条件的 $g(t,0,0)$ 满足 $C_\beta[g(t,0,0),\Gamma]\leqslant d_0^*$ $(0<d_0^*<+\infty)$，则进一步有

$$S(w(z))=C_\beta[w(z),\overline{D}_R]+L_{p_0}[|w_{\bar z}|+|w_z|,\overline{D}_R]\leqslant M(d+d_0^*), \tag{2.2}$$

其中 M 如(2.1)中所述.

对于问题 H，则有

定理 2.1 设 $w(z)$是(1.1)之问题 H 的解，又(1.5)及(1.6)中的 ε 适当小，则有估计式：

$$S(w) = C_\beta[w(z),\overline{D}_R] + L_{p_0}[|w_{\bar z}| + |w_z|,\overline{D}_R] < M'$$
$$\equiv M'(q_0,p_0,k_0,D_R,v,d,\alpha(t)). \tag{2.3}$$

证明 先将(1.1)中第一个未知函数所表示的复方程写成形式：

$$w_{1\bar z} - Q_{11}w_{1z} = A_{11}^{(1)}w_1 + A_{11}^{(2)}\overline{w}_1 + A_1^*,$$
$$A_1^* = A_1^{(3)} + \sum_{l=2}^{n}[Q_{1l}w_{lz} + A_{1l}^{(1)}w_l + A_{1l}^{(2)}\overline{w}_{1l}], \tag{2.4}$$

$w_1(z)$满足 $k=1$ 时的如下边界条件及点型条件：

$$w_k^+[\alpha(t)] = G_k(t)w_k^-(t) + g_k(t,w^+,w^-),\ t\in\Gamma, \tag{2.5}$$
$$w_k^-(z_j) = a_{k_j} + ib_{k_j}\ (j=1,\cdots,n),$$
$$w_k^-(\infty) = 0\ (K_k\geqslant 0),\ w_k^-(z) = 0(|z|^{-K_k})\ (z\to\infty)\ (K_k<0). \tag{2.6}$$

由已知条件可得

$$L_{p_0}[A_1^*,\overline{D}_R] \leqslant d_0 + \varepsilon L_{p_0}[w_z,\overline{D}_R] + 2\varepsilon C[w,\overline{D}_R]$$
$$\leqslant d_0 + 3\varepsilon S(w) \equiv d_0^*. \tag{2.7}$$

又 $C_\beta[g(t,0,0),\Gamma]\leqslant d\ (0<d<+\infty)$，于是仿(2.1)及(2.2)之推导，可得

$$S(w_1) = C_\beta[w_1,\overline{D}_R] + L_{p_0}[|w_{1\bar z}| + w_{1z}|,\overline{D}_R] \leqslant M(d+d_0^*)$$
$$= M[(d+d_0) + 3\varepsilon S(w)]T_1,\ T_1 = 1. \tag{2.8}$$

其次，将(1,1)中第二个未知函数的表示的复方程写成形式

$$w_{2\bar z} - Q_{22}w_{2z} = A_{22}^{(1)}w_2 + A_{22}^{(2)}\overline{w}_2 + A_2^*,$$
$$A_2^* = A_2^{(3)} + Q_{21}w_{1z} + A_{21}^{(1)}w_1 + A_{21}^{(2)}\overline{w}_1 + \sum_{l=3}^{n}[Q_{2l}w_{lz} + A_{2l}^{(1)}w_l + A_{2l}^{(2)}\overline{w}_l], \tag{2.9}$$

$w_2(z)$还满足 $k=2$ 时的条件(2.5)及(2.6)．仿(2.7)之推导，可得

$$L_{p_0}[A_2^*,\overline{D}_R] \leqslant d_0 + 3dS(w_1) + \varepsilon L_{p_0}[w_z,\overline{D}_R] + 2\varepsilon C(w,\overline{D}_R)$$
$$\leqslant d_0 + 3d(S(w_1) + 3\varepsilon S(w) \equiv d_1^*, \tag{2.10}$$

又 $C_\beta[g(t,0,0),\Gamma]\leqslant d\ (0<d<+\infty)$．于是再仿(2.1)及(2.2)的推导出，可得

$$S(w_2) = C_\beta[w_2(z),\overline{D}_R] + L_{p_0}[|w_{2\bar z}| + |w_{2z}|,\overline{D}_R]$$
$$\leqslant M(d_1^* + d) = M[d + d_0 + 3dS(w_1) + 3\varepsilon S(w)]$$
$$\leqslant M[d_0 + d + 3\varepsilon S(w)]T_2,\ T_2 = 1 + 3dMT_1. \tag{2.11}$$

依次类推，可得

$$S(w_3) = C_\beta[w_3(z),\overline{D}_R] + L_{p_0}[|w_{3\bar z}| + |w_{3z}|,\overline{D}_R]$$
$$\leqslant M[d + d_0 + 3\varepsilon S(w)]T_3,\ T_3 = 1 + 3d(T_1 + T_2)M. \tag{2.12}$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$S(w_n) = C_\beta[w_n(z),\overline{D}_R] + L_{p_0}[|w_{n\bar z}| + |w_{nz}|,\overline{D}_R]$$
$$\leqslant M[d + d_0 + 3\varepsilon S(w)]T_n,\ T_n = 1 + 3d(T_1 + \cdots + T_{n-1})M. \tag{2.13}$$

将(2.8)，(2.11)，(2.12)，…，(2.13)相加，得

$$S(w) = \sum_{k=1}^{n} S(w_k) \leqslant [d + d_0 + 3\varepsilon S(w)]MT,\ T = T_1 + \cdots + T_n. \tag{2.14}$$

$(0\leqslant T\equiv T(q_0,p_0,v,d,D_R)<+\infty)$. 选取 ε 足够小，使 $1-3\varepsilon MT>0$，则得估计式(2.3)：

$$S(w)<\frac{(d+d_0)MT}{1-3\varepsilon MT}=M'(q_0,p_0,v,d,D_R,\alpha(t)).$$

不难证明如下

系理 2.1 如果复方程组(1.1)中的 $A^{(3)}$ 代以 $L_{p_0}[A,\overline{D}_R]\leqslant d_0\ (0\leqslant d_0<+\infty)$，又 $g(t,0,0)$ 满足 $C_\beta[g(t,0,0),\Gamma]\leqslant d_0^*\ (0<d_0^*<+\infty)$，则(1.1)之问题 H 的解 $w(z)$ 满足

$$S(w)=C_\beta[w(z),\overline{D}_R]+L_{p_0}[|w_{\bar z}|+|w_z|,\overline{D}_R]\leqslant M'(d_0+d_0^*). \tag{2.15}$$

其中 M' 如定理 2.1 中所述.

3. 问题 H 的可解性

首先使用连续性方法证明如下

引理 3.1 设(1.5)及(1.6)中的 ε 适当小，则解析函数向量之问题 H 存在唯一解.

证明 考虑带系数 $\tau\ (0\leqslant\tau\leqslant 1)$ 的边界条件

$$w^+[\alpha(t)]=G(t)w^-(t)+\tau g(t,w^+,w^-)+R(t),\ t\in\Gamma, \tag{3.1}$$

其中 $R(t)\in C_\beta(\Gamma)\ (0<\beta<1)$，并把求解析函数向量适合(3.1)及点型条件(1.9)之问题记为问题 H^*. 用 I 表示 $0\leqslant\tau\leqslant 1$ 中使上述问题 H^* 对任意 $R(t)\in C_\beta(\Gamma)$ 均可解的点集. 由文[2]可知，当 $\tau=0$ 时，解析函数向量适合边界条件

$$w^+[\alpha(t)]=G(t)w^-(t)+g_1(t)\ (g_1(t)=R(t)\in C_\beta(\Gamma))$$

的问题 H^* 存在(唯一)解，故 I 非空. 由系理 2.1，并仿照文[3]中的方法，可以证明 I 是 $0\leqslant\tau\leqslant 1$ 中闭集和开集. 故知 $I=\{\tau|0\leqslant\tau\leqslant 1\}$，即对 $\tau\in I$ 和任意 $R(t)\in C_\beta(\Gamma)$ 问题 H^* 均可解，特别当 $\tau=0$ 及 $R(t)\equiv 0$ 时的问题 H^* 即解析函数向量之问题 H 可解.

下面证明上述问题 H 解的唯一性. 为此，设 $w^{(1)}(z)$，$w^{(2)}(z)$ 是该问题 H 的两个解，令 $w(t)=w^{(1)}(z)-w^{(2)}(z)$，则 $w(z)$ 满足如下边界条件及点型条件：

$$w^+[\alpha(t)]=G(t)w^-(t)+g(t,w^{(1)+},w^{(1)-})-g(t,w^{(2)+},w^{(2)-}),\ t\in\Gamma. \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} &w_k^-(z_j)=0,\ w^-(\infty)=0, && (K_k\geqslant 0),\\ &w_k^-(z)=0(|z|^{-K_k})\ (z\to\infty), && (K_k<0), \end{aligned} \tag{3.14}$$

其中 $C_\beta[g(t,w^{(1)+},w^{(1)-})-g(t,w^{(2)+},w^{(2)-}),\Gamma]\leqslant\varepsilon\{C_\beta[w^{(1)+}-w^{(2)+},\Gamma]+C_\beta[w^{(1)-}-w^{(2)-},\Gamma]\}\leqslant\varepsilon\{C_\beta[w^{(1)+}-w^{(2)+},\overline{D}_R^+]+C_\beta[w^{(1)-}-w^{(2)-},\overline{D_R^-}]\}=\varepsilon C_\beta[w^{(1)}-w^{(2)},\overline{D}_R^\pm]$. 因此，仿系理 2.1，可得

$$C_\beta[w^{(1)}-w^{(2)},\overline{D}_R^\pm]\leqslant M'''\varepsilon C_B[w^{(1)}-w^{(2)},\overline{D}_R^\pm], \tag{3.15}$$

这里 $M'''=M'''(v,d,D_R)$. 取 ε 适当小，使 $\varepsilon M'''<1$，则从上式可得 $0\leqslant C_\beta[w^{(1)}-w^{(2)},\overline{D}_R^\pm]\leqslant 0$，从而，$w^{(1)}-w^{(2)}\equiv 0$. 即 $w^{(1)}\equiv w^{(2)}$.

现在，使用 Leray－Schander 定理[4]讨论复方程组(1.1)之问题 H 的可解性.

定理 3.1 设复方程组(1.1)满足条件 C，又(1.5)及(1.6)中的 ε 适当小，则(1.1)之问题 H 可解.

证明 先考虑(1.1)的系数在 D_R 的边界 Γ 附近(即 $D_R-D_R^*$)为零的情形，这里 D_R^* 表示 D_R

中与 Γ 之距离不小于$\frac{1}{m}$($m>0$)的点集,记这样的复方程组为

$$w_{\bar z} = F^m(z,w,w_z), F^m = \sigma_m F(z,w,w_z), \tag{3.16}$$

这里 $\sigma_m=1, z\in D_R^m; \sigma_m=0, z\notin D_R^m$. 可以证明(3.16)之问题 H 是可解的. 事实上,引入 Banach 空间 $L_{p_0}[D_R]\equiv B$ 中的有界开集 B_M,其中元素 ω 为可测函数向量,且满足

$$L_{p_0}(\omega(z),D_R) < M', \tag{3.17}$$

M' 如定理 2.1 中所述. 任取 $\omega(z)\in B$,作 $\Psi(z) = T\omega = -\frac{1}{\pi}\iint_{D_R^m}\frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z}d\sigma_\zeta$,它在 D_R^m 外解析. 求满足如下条件之分片解函数向量 $\Phi(z)$:

$$(\Phi + \Psi)^+[a(t)] = G(t)(\Phi + \Psi)^-(t) + g(t,\Phi^+ + \Psi^+,\Phi^- + \Psi^-), \tag{3.18}$$

$$(\Phi + \Psi)^-(\infty) = 0\ (K \geqslant 0);\ (\Phi + \Psi)^-(z) = O(|z|^{-K})\ (z\to\infty)\ (K < 0). \tag{3.19}$$

由引理 3.1 可知这样的解析函数向量 Φ 存在唯一. 记 $w(z)=\Phi(z)+\Psi(z)$. 考虑带参数 t 的积分方程组

$$\Omega_k = tF_k^m(z,w,\Phi' + \pi\Omega),\ k = 1,\cdots,n, 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{3.20}$$

其中 $\Pi\Omega=(\Pi\Omega_1,\cdots,\Pi\Omega_n)^T$, $\Omega=(\Omega_1,\cdots,\Omega_n)^T$. 由压缩映象原理,可从(3.20)求得唯一解 $\Omega(z)\in B$. 记从 $\omega(z)$到 $\Omega(z)$的映射为 $\Omega=T[\omega,t]$ ($0\leqslant t\leqslant 1$). 在给定的条件下,由定理 2.1 及书[3]第五章§4 中的结论,可以验证这样的映射 $\Omega=T[\omega,t]$满足 Leray—Schauder 定理中的三个条件,即有

1) 对每个 $t\in[0,1]$, $T[\omega,t]$将 B 连续映射到自身,又在闭集 $\bar B_M$ 上完全连续,且对 $\omega(z)\in \bar B_M$, $T[\omega,t]$关于 $t\in[0,1]$一致连续.

2) 当 $t=0$ 时,由(3.20)可知,对于所有 $\omega\in B$,有 $\Omega(z)=T[\omega,0]=0\in B_M$. 即 B_M 非空.

3) $\omega=T[\omega,t]$ ($0\leqslant t\leqslant 1$)在 B_M 的边界 $\partial B_M=\bar B_M-B_M$ 上不具有解 ω.

因此,由 Leray—Schauder 定理得知,$\omega=T[\omega,t]$对于每个 $t\in[0,1]$特别对于 $t=1$ 在 B_M 内存在 $\omega(z)$,而 $w(t)=\Phi(z)+T\omega$ 就是(3.16)之问题 H 的解.

余下消去(1.1)的系数在 D_R 的边界附近为零的假设,即证明(1.1)之问题 H 的可解性. 因为对应于 $m=1,2,\cdots$的复方程组(3.16)之问题 H 的解 $w^{(m)}(z)$ ($m=1,2,\cdots$)均满足定理中的估计式,因此可从$\{w^{(m)}(z)\}$选取子序列(不妨设为原序列)在 $D_R^\pm$ 上一致收敛到 $w^{(0)}(z)$,而对于 $w^{(0)}(z)$仍满足(1.4)及(1.9). 又可从$\{w_{\bar z}^{(m)}=\omega^{(m)}(z)\}$与 $w_z^{(m)}\}$分别选取子序列在 $\bar D_R$ 上弱收敛到 $\omega^{(0)}(z)$与 $Y^{(0)}(z)$,而 $w^{(m)}=\Phi^{(m)}+T\omega^{(m)}$. $\{\Phi^{(m)}\}$, $\{T\omega^{(m)}\}$在 $D_R^\pm$ 上分别一致收敛于 $\Phi^{(0)}, T\omega^{(0)}$, $\{\Phi^{(m)\prime}(z)\}$在 $D_R^\pm$ 内闭一致收敛到 $\Phi^{(0)\prime}(z)$. 根据广义微商定义,对任意 $\varphi(z)\in D_0^1(D_R)$,有

$$\iint_{D_R}[w^{(m)}(z)\varphi_z + w_z^{(m)}\varphi(z)]d\sigma_z = 0, \tag{3.21}$$

令 $m\to\infty$,得到 $\iint_{D_R}[w^{0)}(z)\varphi_z + Y^{(0)}(z)\varphi(z)]d\sigma_z = 0$, 故

$$[w^{(0)}(z)]_z = Y^{(0)}(z) = \Phi^{(0)\prime} + \Pi\omega^{(0)}, z\in D_R.$$

又可证明,对常数 p_1 ($2<p_1<p_0<p$),有

$$L_{p_1}[F^m(z,w^{(m)},w_z^{(0)}) - F(z,w^{(0)},w_z^{(0)}),\bar D_R] \to 0\ (m\to\infty). \tag{3.22}$$

由此可得，能从$\{F^{m}(z,w^{(m)},w_{\bar z}^{(0)})\}$选取子序列在$\bar D_R$上弱收敛到$F(z,w^{(0)},w_{\bar z}^{(0)})$。因为$(w^{(m)}-w^{(0)})$弱收敛于0，所以还可推出$F^{m}(z,w^{(m)},w_{\bar z}^{(m)})-F^{m}(z,w^{(m)},w_{\bar z}^{(0)})$在$\bar D_R$上也弱收敛于0。这样，$F^{m}(t,w^{(m)},w_{\bar z}^{(m)})$在$\bar D_R$上弱收敛于$F(z,w^{(0)},w_{\bar z}^{(0)})$。再由$w^{(m)}(z)$对$\bar z$的广义微商定义，对任$\varphi(z)\in D_0^1(D_R)$，有

$$\iint_{D_R}[w^{(m)}(z)\varphi_{\bar z}(z)+F^{m}(t,w^{(m)},w_{\bar z}^{(m)}))\varphi(z)]d\sigma_z=0. \tag{3.33}$$

令$m\to\infty$，可得$\iint_{D_R}[w^{(0)}(z)\varphi_{\bar z}(z)+F(z,w^{(0)},w_{\bar z}^{(0)}))\varphi(z)]d\sigma_z=0$，故有$w_{\bar z}^{(0)}=F(z,w^{(0)},w_{\bar z}^{(0)})$。

综上述，可知$w^{(0)}(z)$即为(1.1)之问题H的解。定理3.1证毕。

参 考 文 献

[1] 李生训、李洪振、李子植，科学通报，22(1984).

[2] 闻国椿、李子偵、李洪振，河北大学学报(自然科学)，2(1981)：28—35.

[3] 闻国椿、杨广武、黄沙等，广义解析函数及其拓广，河北教育出版社，1989.

[4] J. Leray and J. Schauder, *Topologie et equations fonctionnelles*, Ann. Ecloc Nom. Sup. 51(1934)：45—78(YMH 1(1946)，3～4：71—95).

Nonlinear Elliptical Haseman Boundary Value Problem

Li Shengxun

(Hebei Inst. of Chem. Tech. & Light Industry, Shijiazhuang)

Huang Sha

(Hebei Teacher's University, Shijiazhuang)

Abstract

In this paper, we give a priori estimates for the solutions of nonlinear Haseman boundary value problem for elliptic systems of several complex unknown functions. By using the Leray-Schauder theorem, we discuss the solvability for the above boundary value problem.