第14卷第1期 数学研究与评论 Vol. 14 No. 1
1994年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1994

# 四阶和一般偶数阶奇异边值问题正解的存在性*

杨作东 柴新宽 郭宗明 王元
(河南师范大学数学系，新乡 453002)

**摘要** 在本文中得到了四阶和一般偶数阶非线性方程奇异边值问题正解的存在性，从而推广了[1]、[2]中的结果.

**关键词** 奇异值问题，非线性正解，存在性.

在文[1]，[2]中讨论了二阶非线性方程奇异边值问题正解的存在性，改进了文[3]、[4]中的某些结果. 本文的目的是把[1]，[2]中的结果推广到四阶方程和一般偶数阶方程得到相应结果，从而改进了[5]中的结果.

## 一

本节建立边值问题

$$\begin{cases} y^{(4)} = \psi(t)f(t,y,y',y''), \\ y(0)=0, y'(0)=b\geqslant 0, y''(1)=c\geqslant 0, y^{(3)}(1)=0 \end{cases} \tag{1.1}$$

正解的存在性.

**定理 1.1** 假设

(i) $f$ 在 $[0,1]\times(0,\infty)\times(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$ 上连续；

(ii) $\psi(t)>0$ 在 $(0,1)$ 上连续，且 $\int_0^1\psi(t)dt<\infty$；

(iii) 在 $(0,1)\times(0,\infty)\times(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$ 上有

$$\xi(t)\leqslant f(t,y,z,u)\leqslant h(y),$$

这里 (a) $h(y)>0$ 在 $(0,\infty)$ 内连续且不增；

(b) $\xi(t)>0$ 在 $(0,1)$ 内连续，且 $\int_0^1\xi(t)\psi(t)dt<\infty$；

(c) 对任意 $0<a<1$ 使得 $\int_0^1\psi(t)h(at^2)dt<\infty$；

(d) 对任意 $0<a<1$，$f(t,y,z,u)/h(at^2)\psi(t)$.

$[\psi(t)h(at^2)]^{-1}$ 分别在 $[0,1]\times(0,\infty)\times(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$ 和 $[0,1]$ 上连续.

则边值问题(1.1)至少存在一个正解.

**证明** 考察边值问题

* 1991年12月21日收到. 河南省教委资助项目.

$$\begin{cases} y^{(4)} = \varphi(t) f(t, y, y', y''), \\ y(0) = \dfrac{1}{n}, y'(0) = b \geqslant 0, y''(1) = c \geqslant 0, y^{(3)}(1) = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

为了避开 $f$ 在 $y=0$ 处的奇性，定义

$$f_n(t, y, z, u) = \begin{cases} f(t, |y|, z, u), & 0 < t < 1, \quad |y| \geqslant \dfrac{1}{n}, \\ f(t, \dfrac{1}{n}, z, u), & |y| < \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

从而边值问题：

$$\begin{cases} v^{(4)} = \varphi(t) f_n(t, v, v', v''), \\ v(0) = \dfrac{1}{n}, v'(0) = b \geqslant 0, v''(1) = c \geqslant 0, v^{(3)}(1) = 0 \end{cases}$$

的解一定是(1.2)的解. 我们考虑边值问题：

$$\begin{cases} y^{(4)} - (1-\lambda)\delta = \lambda \varphi(t) f_n(t, y, y', y''), \\ y(0) = \dfrac{1}{n}, y'(0) = b \geqslant 0, y''(1) = c \geqslant 0, y^{(3)}(1) = 0, \end{cases} \tag{1.3$_\lambda^n$}$$

这里 $0<\delta<1$ 是下面确定的实数. $\lambda \in (0,1)$. 设 $y(t)$ 满足$(1.3)_\lambda^n$, 则 $y(t) \geqslant \frac{1}{n}$, $y'(t) \geqslant b$, $y''(t) \geqslant c$. 利用$(1.3)_\lambda^n$和条件(iii)得：$y^{(4)} \geqslant (1-\lambda)\delta + \lambda \varphi(t)\xi(t)$.

从 $t$ 到 1 积分两次得 $y''(t) \geqslant c + (1-\lambda)\delta(\frac{1}{2} - t) + \lambda \int_t^1 \int_v^1 \varphi(s)\xi(s) ds dv$，从 0 到 $t$ 积分两次得

$$\begin{aligned} y(t) &\geqslant \frac{1}{n} + bt + \frac{c}{2}t^2 + (1-\lambda)\frac{\delta}{2}(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3) + \lambda \int_0^t \int_0^\xi \int_\eta^1 \int_v^1 \varphi(s)\xi(s) ds dv d\eta d\xi \\ &\geqslant \frac{1}{n} + bt + \frac{c}{2}t^2 + (1-\lambda)\frac{\delta}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}t)t^2 + \lambda \int_0^t \int_0^\xi \int_\eta^1 \int_v^1 \varphi(s)\xi(s) ds dv d\eta d\xi. \end{aligned} \tag{1.4}$$

令 $\rho(\zeta) = \int_0^\zeta \int_\eta^1 \int_v^1 \varphi(s)\xi(s) ds dv d\eta$, $\rho'(\zeta) = \int_\zeta^1 \int_v^1 \varphi(s)\xi(s) ds dv$. 设 $k_0 = \int_0^1 \int_v^1 \varphi(s)\xi(s) ds dv > 0$，则 $\rho'(0) = k_0 > 0$. 从而存在 $\varepsilon > 0$ 使得在$[0, \varepsilon]$上：$\rho(t) \geqslant \frac{k_0}{2}t$ 在$[\varepsilon, 1]$上$\frac{\rho(t)}{t}$有正的下界，则存在 $k_1 > 0$ 使得 $\rho(t) \geqslant k_1 t$. 则对任意 $t \in [0,1]$ 有：$\bar{k} = \max(\frac{k_0}{2}, k_1)$ 使得：$\rho(t) \geqslant \bar{k}t$.

从(1.4)可得 $y(t) \geqslant (1-\lambda)\frac{\delta}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}t)t^2 + \frac{\lambda}{2}\bar{k}t^2 \geqslant [(1-\lambda)\frac{\delta}{12} + \frac{\lambda}{2}\bar{k}]t^2$. 取 $0<\delta<\min(1, 6\bar{k})$，则存在 $0<k_2<1$ 使得 $y(t) \geqslant k_2 t^2$. 于是有 $|y^{(4)}| \leqslant 1 + \varphi(t)h(y) \leqslant 1 + \varphi(t)h(k_2 t^2)$，故有

$$\int_0^1 |y^{(4)}| ds \leqslant 1 + \int_0^1 \varphi(t)h(k_2 t^2) dt = c_0 < \infty$$

$$|y^{(3)}| = |\int_t^1 y^{(4)}(s) ds| \leqslant \int_0^1 |y^{(4)}| ds \leqslant c_0.$$

类似可推出 $|y'| \leqslant c_1$, $|y''| \leqslant c_2$, $|y| \leqslant c_3$.

令 $x(t) = [\varphi(t)h(k_2 t^2)]^{-1}$，从$(1.3)_\lambda^n$得 $|x(t)y^{(4)}| \leqslant 1 + x(t) \leqslant c_4$. 对 $y \in C^4(0,1) \cap C^3[0,1]$定义 $\|y\|_0 = \sup\limits_{[0,1]} |y(t)|$, $\|y\|_3 = \max(\|y\|_0, \|y'\|_0, \|y''\|_0, \|y^{(3)}\|_0)$, $\|y\|_4 = \max(\|y\|_0, \|y'\|_0, \|y''\|_0, \|y^{(3)}\|_0, \sup\limits_{[0,1]} |x(t)y^{(4)}|)$.

定义 $K_{a,b,c}=\{y\in C^4(0,1)\cap C^3[0,1],y(0)=a\geqslant 0,y'(0)=b\geqslant 0,y''(1)=c\geqslant 0,y^{(3)}(1)=0,\|y\|_4<\infty\}$. $C=\{y\in C(0,1)\sup\limits_{[0,1]}|y|<\infty\}$. 我们知道 $K_{a,b,c}$ 和 $C$ 是 Banach 空间(参见文献[5]).

定义 $G_{\lambda,n}:\{C^3[0,1]\to C,j:K_{\frac{1}{n},b,c}\to C^3[0,1],L:K_{\frac{1}{n},a,b}\to C.\ G_{\lambda n}=x(t)[(1-\lambda)\delta+\lambda\varphi(t)f_n(t,y,y',y'')],jy=y$ 且 $Ly=x(t)y^{(4)}$. 由 $x(t)f_n(t,y,z,u)$ 连续得 $G_{\lambda,n}$ 连续. 由[3],[4]中可知 $j$ 全连续, $L^{-1}$ 存在且连续,现在(1.3)$_\lambda^*$等价于方程

$$(I+L^{-1}G_{\lambda,n}j)(y)=0. \tag{1.5}$$

令 $c^*=\max(c_0,c_1,c_2,c_3,c_4,1+\frac{c}{2}+b+\frac{11}{24})$, 定义 $U=\{y\in K_{\frac{1}{n},b,c},\|y\|_4<c^*+1\}$, 则 $y\in\partial U$ 时, $(I+L^{-1}G_{\lambda,n}j)(y)\neq 0$. 由 Leray—Schauder 度理论得:

$$\deg(I+L^{-1}G_{\lambda,n}j,U,0)=\deg(I+L^{-1}(G_{0,n}j),U,0)=\deg(I+L^{-1}(\delta x(t)),U,0).$$

由 $L^{-1}(\delta x(t))=\frac{1}{n}+\frac{c}{2}t^2+bt+\delta(\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{24}t^4-\frac{1}{6}t^3)\in U$, 故

$$\deg(I+L^{-1}G_{1,n}j,U,0)=\deg(I,U,L^{-1}(\delta x(t)))\neq 0.$$

于是得方程

$$\begin{cases}y^{(4)}=\varphi(t)f_n(t,y,y',y''),\\ y(0)=\frac{1}{n},y'(0)=b,y''(1)=c,y^{(3)}(1)=0\end{cases}$$

对$\forall\ n\in N$ 至少存在一个解 $y_n(t)$ 且 $|y_n|\leqslant c_3,|y_n'(t)|\leqslant c_1,|y_n''(t)|\leqslant c_2,|y^{(3)}(t)|\leqslant c_0$. 从而一致有界且等度连续,由 Arzela—Ascoli 定理得$\{y_n\}$存在子列$\{y_{n_k}\}$一致收敛于 $y$(二阶连续可导),且 $y\geqslant 0,y'\geqslant b',y''\geqslant c$. 而 $y_{n_k}$ 满足积分方程

$$y_{n_k}(t)=y_{n_k}(1)+y_{n_k}'(1)(t-1)+\int_t^1\frac{(s-t)^3}{3!}\varphi(s)f(s,y_{n_k},y_{n_k}',y_{n_k}'')ds.$$

由于对 $t\in(0,1]$和 $s\in[t,1]$以及在$[-c_3,c_3]\times[-c_2,c_2]\times[-c_3,c_3]$上 $f(s,y_{n_k},y_{n_k}',y_{n_k}'')$ 一致收敛于 $f(s,y,y',y'')$. 故有 $y(t)=y(1)+y'(1)(t-1)+\int_t^1\frac{(s-t)^3}{3!}\varphi(s)f(s,y,y',y'')ds$, $y(t)$满足边界条件显然. 故 $y$ 满足(1.1).

**注 1** 对边界条件:$y(0)=a\geqslant 0,y'(0)=0,y'(1)=0,y^{(3)}(1)=0$ 或 $y(0)=a\geqslant 0,y'(1)=b\geqslant 0,y''(0)=0,y^{(3)}(1)=0$ 仿定理 1.1 可类似讨论奇异边值问题正解存在性.

**例 1** 令 $f(t,y,z,u)=ty^{-\frac{1}{4}}(1+y^{\frac{1}{4}})(2+z^2)(1+z^2)^{-1}(3+u^2)(1+u^2)^{-1}$. 则有 $3t\leqslant f(t,y,z,u)\leqslant 6y^{-\frac{1}{4}}(1+3y^{\frac{1}{4}})$. 即 $\xi(t)=3t,h(y)=6y^{-\frac{1}{4}}(1+3y^{\frac{1}{4}})$. 再令:$\varphi(t)=t^{-\frac{1}{4}}$. 易验证 $f(t,y,z,u)$满足定理 1.1 的全部条件. 则得边值问题(1.1)至少存在一个正解.

**定理 1.2** 假设

(i) $f$ 在$[0,1]\times(0,\infty)\times(0,\infty)\times(0,\infty)$上连续;

(ii) $\varphi(t)>0$ 在$(0,1)$上连续且 $\int_0^1\varphi(t)dt<\infty$;

(iii) 在$(0,1)\times(0,\infty)\times(0,\infty)\times(0,\infty)$有

$$\xi(t)\leqslant f(t,y,z,u)\leqslant h(y)P(z)Q(u);$$

这里

(a) $h(y)>0,P(z)>0,Q(u)>0$ 在$(0,\infty)$上连续且不增;

(b) $\xi(t)>0$ 在 $(0,1)$ 内连续且 $\psi(1)\xi(1)>0$, $\int_0^1\psi(t)\xi(t)dt<\infty$;

(c) 对任意 $0<\alpha,\beta,\gamma<1$ 有 $\int_0^1\psi(t)h(\alpha t^2)P(\beta t)Q(\gamma(1-t)^2)dt<\infty$;

(d) 对任意 $0<\alpha,\beta,\gamma<1$:

$f(t,y,z,u)/[\psi(t)h(\alpha t^2)P(\beta t)Q(\gamma(1-t)^2)]$ 和 $[\psi(t)h(\alpha t^2)P(\beta t)Q(\gamma(1-t)^2)]^{-1}$

分别在 $[0,1]\times(0,\infty)\times(0,\infty)\times(0,\infty)$ 和 $[0,1]$ 上连续.

则边值问题(1.1)至少存在一个正解.

**证明** 对于条件 $y'(0)=b\neq0, y''(1)=c\neq0$ 易从定理 1.1 得到. 下面对 $b=c=0$ 来证明. 与定理 1.1 类似为避免 $f$ 在 $y=0,y'=0,y''=0$ 处有奇异性. 考察边值问题:

$$\begin{cases}y^{(4)}-(1-\lambda)\delta=\lambda\psi(t)f_n(t,y,y',y''),\\ y(0)=\dfrac{1}{n},y'(0)=\dfrac{1}{n},y''(1)=\dfrac{1}{n},y^{(3)}(1)=0,\end{cases}\tag{1.6$^n_\lambda$}$$

这里

$$f_n(t,y,y',y'')=\begin{cases}f(t,y,y',y''), & |y|\geqslant\dfrac{1}{n},|y'|\geqslant\dfrac{1}{n},|y''|\geqslant\dfrac{1}{n},\\ f(t,\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}), & |y|<\dfrac{1}{n},|y'|<\dfrac{1}{n},|y''|<\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

设 $y$ 为 $(1.6)^n_\lambda$ 的解, 则 $y(t)\geqslant\frac{1}{n}, y'(t)\geqslant\frac{1}{n}, y''(t)\geqslant\frac{1}{n}$ 与定理 1.1 类似可证, 存在 $0<k_1<1, 0<k_2<1$ 使得: $y'(t)\geqslant k_2t, y(t)\geqslant k_1t^2$. 又 $y^{(4)}(1)\geqslant(1-\lambda)\delta+\lambda\psi(1)\xi(1)>(1-\lambda)\delta+\lambda c_1$. 于是有: 存在 $\varepsilon>0$ 使得在 $[1-\varepsilon,1]$ 上有: $-y^{(3)}(t)\geqslant[(1-\lambda)\delta+\lambda c_1](1-t)$; 在 $[0,1-\varepsilon]$ 上, $y^{(3)}(t)/(1-t)$ 有正下界, 故存在 $k_3>0$ 使得 $-y^{(3)}(t)\geqslant k_3(1-t)$. 则取 $0<\delta<\min(1,c_1)$. 从而对 $\forall\ t\in[0,1]$, 存在 $\bar{k}=\max(k_3,\delta)$ 使得 $-y^{(3)}(t)\geqslant\bar{k}(1-t)$ 从 $t$ 到 1 积分得 $y''(t)\geqslant\frac{1}{n}+\frac{\bar{k}}{2}(1-t)^2\geqslant\frac{\bar{k}}{2}(1-t)^2$. 于是有: $y^{(4)}(t)\leqslant1+\psi(t)h(k_1t^2)P(k_2t)Q(k_3(1-t)^2)$. 则有

$$\int_0^1|y^{(4)}|ds\leqslant1+\int_0^1\psi(t)h(k_1t^2)P(k_2t)Q(k_3(1-t)^2)dt<\infty.$$

从而推出: $|y|\leqslant c_0, |y'|\leqslant c_1, |y''|\leqslant c_2, |y^{(3)}|\leqslant c_3$. 其余证明与定理 1.1 类似, 略.

**注 2** 对边界条件: $y(0)=a\geqslant0, y'(0)=0, y'(1)=0, y^{(3)}(1)=0$ 或 $y(0)=a\geqslant0, y'(1)=b\geqslant0, y''(0)=0, y^{(3)}(1)=0$. 仿定理 1.2 可类似讨论奇异边值问题.

**例 2** 令 $f(t,y,z,u)=ty^{-\frac{1}{8}}(1+y^{\frac{1}{8}})P(z)Q(u)$

$$P(z)=\begin{cases}z^{-\frac{1}{4}}, & 0<z\leqslant1,\\ \dfrac{1}{2}(1+z^{-\frac{4}{5}}), & z>1,\end{cases}\qquad Q(u)=\begin{cases}u^{-\frac{1}{4}}, & 0<u\leqslant1,\\ \dfrac{1}{4}(1+u^{-\frac{4}{5}}), & u>1.\end{cases}$$

于是有: $\xi(t)=t/8\leqslant f(t,y,z,u)\leqslant h(y)P(z)Q(u)$. 令 $\psi(t)=t^{\frac{1}{2}}$. 易验证 $f$ 满足定理 1.2 的全部条件. 则边值问题(1.1)至少存在一个正解.

## 二

本节讨论边值问题:

$$\begin{cases} y^{(4)}(t) = \psi(t)f(t,y,y',y''), \\ y(0) = y(1) = 0, y''(0) = y^{(3)}(1) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

正解存在性.

**定理 2.1** 假设

(i) $f$ 在 $[0,1]\times(0,\infty)\times(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$ 上连续；

(ii) $\psi(t)>0$ 在 $(0,1)$ 内连续，且 $\int_0^1\psi(t)dt<\infty$；

(iii) 在 $(0,1)\times(0,\infty)\times(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$ 上有：

$$\xi(t)\leqslant f(t,y,z,u)\leqslant h(y)P(|z|)Q(|u|),$$

这里

(a) $h(y)>0, P(|z|)>0, Q(|u|)>0$ 在 $(0,\infty)$ 和 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且不增；

(b) $\xi(t)>0$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $\xi(1)\psi(1)>0$，$\int_0^1\xi(t)\psi(t)dt<\infty$.

(c) 对任意 $0<\varepsilon,\alpha,\beta,<1$ 使得：

$$\int_0^{\varepsilon}\psi(t)h(\alpha(1-t)^2)Q(\beta t)dt<\infty, \int_{1-\varepsilon}^1\psi(t)h(\alpha t^2)Q(\beta t)dt<\infty, \int_0^{\varepsilon}P(t)dt<\infty.$$

(d) 对任意 $0<\alpha,\beta<1$. $[h(\alpha(1-t)^2)Q(\beta t)]^{-1}$ 和 $[h(\alpha t^2)Q(\beta t)]^{-1}$ 在 $[0,1]$ 上连续.

则边值问题(2.1)至少存在一个正解.

**证明** 首先考虑边值问题：

$$\begin{cases} y^{(4)}-(1-\lambda)\delta=\lambda\psi(t)f_n(t,y+\dfrac{1}{n},y',y''), \\ y(0)=y(1)=0, y''(0)=y^{(3)}(1)=0, \end{cases} \tag{2.2$_\lambda^n$}$$

其中

$$f_n(t,y,z,u)=\begin{cases} f(t,y,z,u), & |y|\geqslant\dfrac{1}{n}, \\ f(t,\dfrac{1}{n},z,u), & |y|<\dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

令 $y(t)$ 为 $(2.2)_\lambda^n$ 的解，则有：$y''(t)<0$. 由 $y(0)=y(1)=0$ 得：存在 $t_0\in(0,1)$ 有 $y'(t_0)=0$. 从而当 $t\geqslant t_0$ 时，$y'(t)<0$. $t<t_0$ 时，$y'(t)>0$. 故有 $\forall\ t\in[0,1]$，$y(t)\geqslant0$. 与定理 1.2 类似可证：存在 $0<k_1<1$ 使得：$-y''(t)\geqslant k_1t$. 又当 $t\geqslant t_0$ 时有：从 $y^{(4)}(t)\geqslant(1-\lambda)\delta+\lambda\psi(t)\xi(t)$ 得：

$$-y''(t)\geqslant(1-\lambda)\delta(t-t^2/2)+\lambda\int_0^t\int_v^1\psi(s)\xi(s)dsdv\geqslant(1-\lambda)\delta t/2+\lambda\int_0^t\int_v^1\psi(s)\xi(s)dsdv.$$

从 $t_0$ 到 $t$ 积分得：

$$-y'(t)\geqslant(1-\lambda)\frac{\delta}{4}(t^2-t_0^2)+\lambda\int_{t_0}^t\int_0^{\eta}\int_v^1\psi(s)\xi(s)dsdvd\eta,$$

故有：

$$y(t)\geqslant(1-\lambda)\frac{\delta}{4}(1-t)^2(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}+t_0)(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}-t_0)+\lambda\int_t^1\int_{t_0}^{\xi}\int_0^{\eta}\int_v^1\psi(s)\xi(s)dsdvd\eta d\xi.$$

令

$$\rho(\xi)=\int_{t_0}^{\xi}\int_0^{\eta}\int_v^1\psi(s)\xi(s)dsdvd\eta.$$

设 $k_0=\int_0^1\int_v^1 \psi(s)\xi(s)dsdv$，$\rho'(1)=k_0>0$，从而存在 $\bar{k}>0$，使得：$\rho(t)\geqslant\bar{k}(1-t)$。于是有：

$$y(t)\geqslant[(1-\lambda)\frac{\delta}{4}(\frac{1}{2}+\frac{t}{2})^2-t_0^2)+\lambda\frac{\bar{k}}{2}](1-t)^2.$$

于是存在 $0<k_3<1$ 使得：$y(t)\geqslant k_2(1-t)^2$。同理可证：存在 $0<k_3<1$ 有：$-y'(t)\geqslant k_3(t-t_0)$。类似对 $t<t_0$ 时有：$y(t)\geqslant k_4t^2$，$y'(t)\geqslant k_5(t_0-t)$。综上所述有

$$\begin{aligned}|y^{(4)}|&\leqslant 1+\psi(t)h(y)P(|y'|)Q(|y''|)\\&\leqslant\begin{cases}1+\psi(t)h(k_2(1-t)^2P(k_3(t-t_0))Q(k_1t), & t\in(t_0,1),\\ 1+\psi(t)h(k_4t^2)P(k_5(t_0-t))Q(k_1t), & t\in(0,t_0).\end{cases}\end{aligned}$$

令

$$x(t)=\begin{cases}[h(k_2(1-t)^2)Q(k_1t)]^{-1}, & t\in(t_0,1),\\ [h(k_4t^2)Q(k_1t)]^{-1}, & t\in(0,t_0).\end{cases}$$

由条件(iii)(d)得：$|x(t)y^{(4)}|\leqslant c_1$。再利用条件(c)得：$|y|\leqslant c_2$，$|y'|\leqslant c_3$，$|y''|\leqslant c_4$，$|y^{(3)}|\leqslant c_5$。其余证明与定理 1.1 类似。

**注 3** 对边界条件：$y(0)=0, y'(0)=0, y''(0)=y''(1)=0$ 仿定理 2.1 可得类似结果。

## 三

本节进一步考虑一般偶数阶边值问题：

$$\begin{cases}y^{(2n)}(t)=\psi(t)f(t,y,y'),\\ y(0)=a\geqslant 0, y'(0)=0, y^{(j)}(1)=0, \ j=2,3,\cdots,2n-1\end{cases}\tag{3.1}$$

正解的存在性。

**定理** 3.1 假设

(i) $f$ 在 $[0,1]\times(0,\infty)\times(0,\infty)$ 上连续；

(ii) $\psi(t)>0$ 在 $(0,1)$ 内连续，且 $\int_0^1\psi(t)dt<\infty$；

(iii) 在 $(0,1)\times(0,\infty)\times(0,\infty)$ 上有：

$$\xi(t)\leqslant f(t,y,z)\leqslant h(y)p(z),$$

这里

(a) $h(y)>0$，$p(z)>0$ 在 $(0,\infty)$ 上连续且不增；

(b) $\xi(t)>0$ 在 $(0,1)$ 内连续且 $\int_0^1\psi(t)\xi(t)dt<\infty$；

(c) 对任意 $0<\alpha,\beta<1$ 有：$\int_0^1\psi(t)h(\alpha t^n)P(\beta t^{n-1})dt<\infty$；

(d) $f(t,y,z)/[h(\alpha t^n)p(\beta t)]$ 和 $[\psi(t)h(\alpha t^n)P(\beta t^{n-1})]^{-1}$ 分别在 $[0,1]\times(0,\infty)\times(0,\infty)$ 和 $[0,1]$ 上连续，$0<\alpha,\beta<1$。

则边值问题(3.1)至少存在一个正解。

与定理 1.2 证明类似，略。

## 参 考 文 献

[1] Guo ZongMing, *Soonbility of some singular nonlinear boundary value problems and existence of positive radial solutions of some nonlinear elliptic problems*, Nonlinear Anal, 1991, Vol 16(9):781—790.

[2] Gou ZongMing, *Existence of positive radial solutions for a class of nonlinear singular elliptic problems in annular domains*, Proc Edinbrugh Math. Soc. 1992, 35:405--418.

[3] L. E. Bosisud, D. O'Regan, W. D. Royalty, *Solvability of some nonlinear boundary value problems*, Nonlinear Anal, 1988, 12:855—869.

[4] D. O'Regan, *Positive solutions to singular and non—singular second—order boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl. 1989, 142:40—52.

[5] D. O'Regan, *Fourth order (and high order) singular boundary value problems*, *Nonlinear Anal*, 1990, 14(12):1001—1038.


# Existence of Positive Solutions for Fourth Order and General Even Order Singular Boundary Value Problems


*Yang Zuodong* *Cai Xinkuan* *Guo Zongming* *Wang Yuan*

(Dept. of Math., Henan Normal Univ., Xinxiang, Henan)



## Abstract

We prove the existence of positive solutions for fourth and general even order singular boundary value problems, and generalize the results of [1,2].