系统(E)：$\dot{x}=\psi(y)$，$\dot{y}=-g(x)-f(x)y$ 极限环的唯一性*

索光俭　　陈秀东
（长春师范学院，130032）　（大连理工大学，116024）

定理 (E)如标题所示，$(x,y)\in[-a,b]\times[-c,d]$；$f,g,\psi\in C^1$；$y\psi(y)>0(y\neq 0)$；$\frac{d\psi(y)}{dy}>0$；$xg(x)>0(x\neq 0)$；且满足：

(i) 当 $-a<x<x_0<0$ 时，$f(x)<0$，当 $x_0<x<b$ 时，$f(x)>0$.

(ii) 方程组 $F(u)=F(v)$，$\frac{g(u)}{f(u)}=\frac{g(v)}{f(v)}$在$(-a<u<x_0,x_0<v<b)$上有唯一交点，此处

$$F(x)=\int_0^x f(\xi)d\xi.$$

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)<0$，当 $x<x_0$ 时.

则(E)至多存在一个极限环，若存在它是不稳定环.

先证几个引理. 由(i) $p=F(x)$在$(x_0,b]$及$[-a,x_0)$上单调，记其反函数为 $x=x_i(p)$，$(i=1,2)$. 用变换 $T:y\to y,x\to x_i(p)$变换(E)则得到与$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\psi(y)}[-g(x)-f(x)y]$等价的两个方程[1]：$(x_0<x_1(p)<b,-a<x_2(p)<x_0)$：

$$\frac{dy}{dp}=\frac{1}{\psi(y)}\left[-\frac{g(x_0(p))}{f(x_i(p))}-y\right]=f_i(p,y),\ p>p_0=F(x_0). \tag{E$_i$}$$

引理1 若(i)满足，设Γ是(E)的闭轨线(图1a)，$x=x_0$把Γ分为Γ_1(右)与Γ_2两部分，其内部为G_i，在T作用下，Γ_i与G_i分别变为$\bar{\Gamma}_i$与$\bar{G}_i(i=1,2)$，则

（Ⅰ） $S_{\bar{G}_1}=S_{\bar{G}_2}$（$S$表示面积）；

（Ⅱ） $\bar{\Gamma}_1$与$\bar{\Gamma}_2$在$p>p_0$时必相交，交点数为偶数.

证明 （Ⅰ）. 显然，因 $\mathrm{div}(E)=-f(x)$，注意到$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(p,y)}\right|$在$\bar{G}_i$上为$\frac{(-1)^{i-1}}{f(x_i(p))}$，于是有

$$0=\iint\limits_{G_2\cup G_1}(-f(x))dxdy=\iint\limits_{G_2}(-f(x))dxdy+\iint\limits_{G_1}(-f(x))dxdy=\iint\limits_{\bar{G}_2}dpdy-\iint\limits_{\bar{G}_2}dpdy,$$

变形后得 $S_{\bar{G}_1}=S_{\bar{G}_2}$. 现证（Ⅱ），若 $p>p_0$ 时 $\bar{\Gamma}_1$与$\bar{\Gamma}_2$不相交，则必一个位于另一个内部，这与（Ⅰ）矛盾. 又，无伤于一般性，可认为当 $0<p-p_0\ll 1$ 时，$\frac{g(x_2(p))}{f(x_2(p))}>\frac{g(x_1(p))}{f(x_1(p))}$. 用 $j=1,2$，表示上、下半平面，于是$(-1)^{j-1}f_1(p,y)>(-1)^{j-1}f_2(p,y)$，记$\Gamma_i$相应部分的曲线方程为 $y=y_{ij}(p)$，注意到 $y_{1j}(p_0)=y_{2j}(p_0)$由比较定理知当 $0<p-p_0\ll 1$ 时有$(-1)^{j-1}y_{1j}(p)>(-1)^{j-1}y_{2j}(p)$，故知交点数目为偶数，证毕.

引理2 若(ii)中方程无解，则(E)无闭轨线.

* 1991年10月16日收到.

证明 不妨设$\frac{g(x_2(p))}{f(x_2(p))}>\frac{g(x_1(p))}{f(x_1(p))}$, $(p>p_0)$. 于是$(-1)^{j-1}f_1(p,y)>(-1)^{j-1}f_2(p,y)$,因为$y_{1j}(p_0)=y_{2j}(p_0)$,所以当$p>p_0$时,$(-1)^{j-1}y_{1j}(p)>(-1)^{j-1}y_{2j}(p)$,即$\bar{\Gamma}_2$位于$\bar{\Gamma}_1$内部,这与引理一矛盾. 证毕.

引理 3 若(i),(ii)成立,则$\bar{\Gamma}_1$与$\bar{\Gamma}_2$在上下平面的$p>p_0$上各恰有一个交点.

证明 设p^*是$\frac{g(x_1(p))}{f(x_1(p))}=\frac{g(x_2(p))}{f(x_1(p))}$的唯一根,在$0<p-p_0\ll 1$时,$\frac{g(x_1(p))}{f(x_1(p))}<0<\frac{g(x_2(p))}{f(x_2(p))}$故在$(p_0,p^*)$上有$\frac{g(x_1(p))}{f(x_1(p))}<\frac{g(x_2(p))}{f(x_2(p))}$,即$(-1)^{j-1}f_1(p,y)>(-1)^{j-1}f_2(p,y)$. 又$y_{1j}(p_0)=y_{2j}(p_0)$故$(-1)^{j-1}y_{1j}(p)>(-1)^{j-1}y_{2j}(p)$. 设$q_j$是使$y_{1j}(p)=y_{2j}(p)$成立的第一个值,则$q_j>p^*$. 当$p>q_j$时,$(-1)^{j-1}f_1(p,y)<(-1)^{j-1}f_2(p,y)$,因此,$(-1)^{j-1}y_{1j}(p)<(-1)^{j-1}y_{2j}(p)$. 这就是说$\bar{\Gamma}_i$在上下半平面当$p>p_0$分别有至多一个交点. 由引理 2 它们交正偶数个点,故在上下半面上各恰有一个交点. 若p_i是$\bar{\Gamma}_i$的最右点,则$p_2>p_1$(图 1b),证毕.

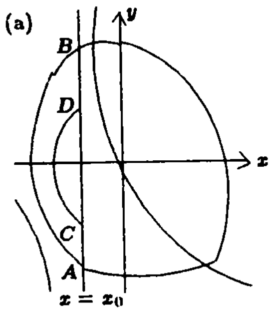

图 1a

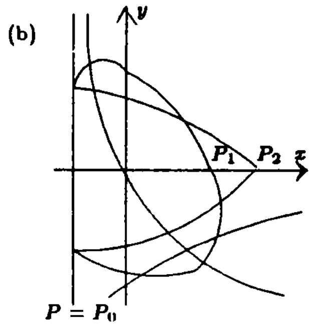

图 1b

定理的证明 设Γ是(E)的极限环,只需证$\oint_{\Gamma}(-f(x))dl>0$即可. 这里积分沿顺时针方向进行. 现过$p_1$引$(E)_2$的轨线$\bar{\Gamma}_3$(图 1b)记其原象为$\Gamma_3$(图 1a). 记$\Gamma_2$和$\Gamma_3$与$x=x_0$交点为$A$, B, C, D. 注意到在$x=x_0$上$f(x)\equiv 0$以及极限环不与这个区域中$-g(x)-f(x)y=0$相交这个事实,由(iii)

$$\int_{\Gamma_3}(-f(x))dl-\int_{\Gamma_2}(-f(x))dl=\Big(\int_{\widehat{CD}}+\int_{DB}+\int_{\widehat{BA}}+\int_{AC}\Big)(-f(x))dl$$

$$=\int_{\widehat{CDBAC}}\frac{-f(x)}{-g(x)-f(x)}dy=\iint_{\operatorname{int}(\widehat{CDBAC})}\frac{d}{dx}\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big)\Big(1+\frac{f(x)}{g(x)}y\Big)^{-2}dxdy<0,$$

于是

$$\int_{\Gamma_3}(-f(x))dl<\int_{\Gamma_2}(-f(x))dl, \tag{1}$$

又

$$\int_{\Gamma_3}(-f(x))dl=\int_{p_0}^{p_1}\Big[\frac{1}{\psi(y_{31}(p))}-\frac{1}{\psi(y_{32}(p))}\Big]dp, \tag{2}$$

$$\int_{\Gamma_1}(-f(x))dl=-\int_{p_0}^{p_1}\Big[\frac{1}{\psi(y_{11}(p))}-\frac{1}{\psi(y_{12}(p))}\Big]dp. \tag{3}$$

由(1)—(3)

$$\int_{\Gamma}(-f(x))dt=\left(\int_{\Gamma_1}+\int_{\Gamma_2}\right)(-f(x))dt>\left(\int_{\Gamma_1}+\int_{\Gamma_3}\right)(-f(x))dt$$

$$=\int_{p_0}^{p_1}\frac{\psi(y_{11}(p))-\psi(y_{31}(p))}{\psi(y_{31}(p))\psi(y_{11}(p))}dp+\int_{p_0}^{p_1}\frac{\psi(y_{32}(p))-\psi(y_{12}(p))}{\psi(y_{32}(p))\psi(y_{12}(p))}dp, \tag{4}$$

(3)、(4)右端理解为广义积分. 由$\frac{d\psi(y)}{dy}>0$，要证(4)式为正，只需证当 $p\in(p_0,p_1)$时，有

$$(-1)^{j-1}y_{1j}(p)>(-1)^{j-1}y_{3j}(p)$$

即可. 由于在(p_0,p^*)上$\frac{g(x_1(p))}{f(x_1(p))}<\frac{g(x_2(p))}{f(x_2(p))}$，故

$$(-1)^{j-1}f_1(p,y)>(-1)^{j-1}f_2(p,y),$$

又

$$(-1)^{j-1}y_{1j}(p_0)>(-1)^{j-1}y_{3j}(p_0),$$

故知$(-1)^{j-1}y_{1j}(p)>(-1)^{j-1}y_{3j}(p)$成立. 又在$(p^*,p_1)$上有

$$(-1)^{j-1}f_1(p,y)<(-1)^{j-1}f_2(p,y),$$

且 $y_{1j}(p_1)=y_{3j}(p_1)$故

$$(-1)^{j-1}y_{1j}(p)>(-1)y_{3j}(p).$$

证毕.

参 考 文 献

[1] Черкас Л. А., Диф. ур., 8:5(1977).

On the Uniqueness of Limit Cycle of System (E): $\dot{x}=\psi(y), \dot{y}=-g(x)-f(x)y$

Suo Guangjian
(Changchun Teacher's College, Changchun)

Chen Xiudong
(Dalian Univ. of Tech.)

Abstract

We obtain a uniqueness condition for the existence of limit cycle. Suppose $(x,y)\in[-a,b]\times[-c,d]; f,g,\psi\in C^1; y\psi(y)>0\ (y\neq 0); \frac{d\psi(y)}{dy}>0; x(g(x)>0\ (x\neq 0)$; and satisfy i) $f(x)<0$ for $-a<x<x_0, f(x)>0$ for $x_0<x<b$; ii) equation system $F(u)=F(v)$, $\frac{g(u)}{f(u)}=\frac{g(v)}{f(v)}$ has a unique intersection on $(-a<u<x_0, x_0<v<b)$, where $F(x)=\int_0^x f(\xi)d\xi$; (iii) $\frac{d}{dx}(\frac{f(x)}{g(x)})<0$ for $x<x_0$, then system (E) has at most one limit cycle (not stable).