第14卷第1期 数学研究与评论 Vol. 14 No. 1
1994年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1994

具有非线性控制函数的概率收缩*

曾 文 智
(贵州大学数学系，贵阳 550025)

摘 要 本文引进具有非线性控制函数的概率收缩概念，在PN空间建立几个非线性算子方程解的存在唯一性定理，推广了Altmam[1]和文献[5]的相应结果.

§1 引 言

最近文献[5]引入概率收缩的概念，将Altman的收缩理论推广到PN空间，建立了几个非线性算子方程解的存在唯一性定理. 本文继续这方面的研究，引进更一般的具有非线性控制函数的概率收缩概念，进一步讨论了非线性算子方程解存在唯一性问题.

§2 预备知识

今后记 $R=(-\infty,\infty)$，$R^+=[0,\infty)$，$Z=\{1,2,\cdots\}$.

文献[3]、[4]指出：设 $(X,\mathscr{T},\Delta)$ 为一 Menger PN 空间，Δ 为一连续 t—范数（或至少 $\sup\limits_{0<t<1}\Delta(t,t)=1$），则 $(X,\mathscr{T},\Delta)$ 为由邻域系

$$\{U_y(\varepsilon,\lambda)\mid y\in X,\varepsilon>0,\lambda>0\}=\{y+U_0(\varepsilon,\lambda)\mid y\in X,\varepsilon>0,\lambda>0\}$$

导出的拓扑 $\mathscr{T}$ 的 Hausdorff 拓扑空间，其中 $U_y(\varepsilon,\lambda)=\{q\in X\mid F_{y-q}(\varepsilon)>1-\lambda\}$.

依此拓扑可引入 $\mathscr{T}$—Cauchy 列，$\mathscr{T}$—收敛，$\mathscr{T}$—完备性等概念，请参看文献[5].

定义 2.1 设 $(X,\mathscr{T},\Delta)$，$(Y,\mathscr{T},\Delta)$ 为二 Menger PN 空间，$T:X\to Y$ 为一算子，则

(1) $T:D(T)\subset X\to Y$ 为一闭算子 $\Leftrightarrow\forall\ \{x_n\}\subset D(P)$，若 $x_n\xrightarrow{\mathscr{T}}x$，$Tx_n\xrightarrow{\mathscr{T}}y$，则 $x\in D(T)$，$T_x=y$.

(2) 线性算子为强有界的 $\Leftrightarrow\exists\ M>0$，使

$$F_{Tx}(t)\geqslant F_x(\frac{t}{M}),t\geqslant0,\forall\ x\in X.$$

定义 2.2 $\varphi:R^+\to R^+$ 满足 (φ) 是指

(φ) φ 对 t 严格增、左连续、满射、$\varphi(0)=0$ 且对每一 $a>0$，$\varphi(at)>\max\{a,\varphi(a)\}t$，$t>0$.

引理 2.3 设 $\varphi(t)$ 满足 (φ)，则对 $\forall\ t>0$，

(i) $\varphi(t)>t$，(ii) $\varphi^n(t)>\varphi^{n-1}(t)>\overset{+}{t}$，(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n(t)=\infty$.

证明简单，从略.

---

* 1991年5月8日收到. 1993年5月4日收到修改稿.

§3 主要结果

设$(X,\mathscr{T},\Delta)$，$(Y,\mathscr{T},\Delta)$为二完备 Menger PN 空间，Δ连续，$P:D(P)\subset X\to Y$为一非线性算子，$\Gamma(x):Y\to X$，$x\in X$为一族强有界线性算子，$\varphi:R^+\to R^+$，$\varphi(0)=0$为一满足(φ)的非线性函数.

定义 3.1 $\Gamma(x)$，$x\in X$为算子P的具有非线性控制函数φ的概率收缩$\Leftrightarrow\forall\ x\in D(P)$，$y\in Y$使$x+\Gamma(x)y\in D(P)$时，有

$$F_{P(x+\Gamma(x)y)-Px-y}(t)\geqslant F_y(\varphi(t)),t\geqslant 0.$$

定义 3.2 $\Gamma(x)$，$x\in X$为算子P在$x_0\in D(P)$的具有非线性控制函数φ的一致概率收缩$\Leftrightarrow\forall\ x\in U_{x_0}(\varepsilon_0,\lambda)$，$y\in Y$使$x+\Gamma(x_0)y\in Ux_0(\varepsilon,\lambda)$时，有

$$F_{P(x+\Gamma(x_0)y)-Px-y}(t)\geqslant F_y(\varphi(t)),t\geqslant 0.$$

为了讨论非线性算子方程$Px=0$解的存在唯一性问题，我们作如下迭代程序

$$x_{n+1}=x_n-\Gamma(x_n)Px_n,n=0,1,2,\cdots. \tag{1}$$

$$t_n-t_{n-1}=\varphi(t_{n+1}-t_n),t=0,n=1,2,\cdots. \tag{2}$$

条件(2)由于φ的满射性是可以办到的. 并且假定$t_n\to t^*(n\to\infty)$.

定理 3.1 设$\exists\ B>0$，$t_1>0$，$\lambda_1>0$

(3.1) $F_{P(x+\Gamma(x)y)-Px-y}(t)\geqslant F_y(\varphi(t))$，$t\geqslant 0$，$x\in U_{x_0}(Bt_0^*,\lambda_1)$，$y\in Y$；

(3.2) $F_{\Gamma(x)y}(t)\geqslant F_y(\frac{t}{B})$，$t\geqslant 0$，$x\in U_{x_0}(Bt^*,\lambda_1)$，$y\in Y$；

(3.3) $F_{Px_0}(t_1)>1-\lambda_1$，$P$为$Ux_0(Bt^*,\lambda_1)$上闭算子，则对$\forall\ n\in Z$，$x_n\in U_{x_0}(Bt^*,\lambda_1)$且由迭代程序(1)确定的序列$\{x_n\}\mathscr{T}$收敛于方程$Px=0$的解$x_*$，如果$\Gamma(x)$是满映象，则此解还是唯一的.

证明 于(3.1)令$y=-Px_n$，则由迭代程序(1)，有

$$\begin{aligned}F_{Px_{n+1}}(t)&=F_{P(x_n-\Gamma(x_n)Px_n)-Px_n-(-Px_n)}(t)\\&\geqslant F_{Px_n}(\varphi(t))\geqslant\cdots\geqslant F_{Px_0}(\varphi^{n+1}(t)).\end{aligned} \tag{3}$$

于上式令$n\to\infty$，我们有

$$\lim_{n\to\infty}F_{Px_n}(t)=H(t),t\in R,$$

上式表明

$$Px_n\xrightarrow{\mathscr{T}}0(n\to\infty). \tag{4}$$

应用(1)(3)，有

$$\begin{aligned}F_{x_{n+1}-x_n}(t)&=F_{\Gamma(x_n)Px_n}(t)\\&\geqslant F_{Px_n}(\frac{t}{B})\geqslant F_{Px_0}(\varphi^n(\frac{t}{B})).\end{aligned}$$

应用数学归纳法，结合以上各式，易证

$$x_n\in Ux_0(Bt^*,\lambda_1),\forall\ n\in Z. \tag{5}$$

下证$\{x_n\}$为$\mathscr{T}$Cauchy 列. 事实上，应用φ的性质与迭代序列(2)，对$\forall\ n,m\in Z$，$n<m$，有

$$Fx_n-x_m(Blt^*)=Fx_n-x_m(Bl\sum_{i=1}^{\infty}(t_i-t_{i-1}))$$
$$\geqslant\min(Fx_n-x_{n+1}(Bl(t_1-t_0)),Fx_{n+1}-x_{n-2}(Bl(t_2-t_1)),\cdots Fx_{m-1}-x_m(Bl(t_{m-n}-t_{m-n-1}))$$
$$\geqslant\min(FPx_n(t_1t),FPx_{n+1}(t(t_2-t_1)),\cdots,FPx_{m-1}(t(_{m-n}-t_{m-n-1})))$$
$$\geqslant\min(FPx_n(t_1t),FPx_n\varphi(t\varphi^{-1}(t_1)),\cdots,FPx_{m-2}(\varphi(t\varphi^{-1}(t_{m-n-1}-t_{m-n-2})))$$
$$\geqslant\min(FPx_n(t_1t),FPx_n(t\varphi(\varphi^{-1}(t_1)),\cdots,FPx_{m-2}(t\varphi(\varphi^{-1}(t_{m-n-1}-t_{m-n-2})))$$
$$\geqslant\min(FPx_n(t_1t),FPx_n(t_1t)),\cdots,FPx_{m-1}(t(t_{m-n-1}-t_{m-n-2})))$$
$$\geqslant\cdots\geqslant FPx_n(t_1t)=FPx_0(\varphi^n(t_1t)),$$

于上式令 $n\to\infty$，有

$$\lim Fx_n-x_m(Blt^*)=H(t),t\in R.$$

上式说明$\left\{\frac{x_n}{Bt^*}\right\}$为一$\mathscr{T}$ Cauchy 列，故$\{x_n\}$为一$\mathscr{T}$ Cauchy 列，由 X 的$\mathscr{T}$完备性，可设

$$x_n\xrightarrow{\mathscr{T}}x_*\in X. \tag{6}$$

由 (4)(5)(6) 各式以及 P 在 $U_{x_0}(Bt^*,\lambda_1)$ 上的闭性，知 $x_*\in U_{x_0}(Bt^*,\lambda_1)$ 和 $Px_*=0$，此即证明 x_* 为算子方程 $Px=0$ 的解.

若 $\Gamma(x)$ 为满映象，则此解 x_* 的唯一性，仿[5]极易证明，故从略.

定理 3.2 在定理 3.1 中以具非线性控制函数的一致概念收缩代替概率收缩，定理 3.1 的结论仍然成立.

证同定理 3.1，从略.

对非齐次算子方程 $Px=\xi$，我们考虑非线性算子 $Tx=Px-\xi$. 显然如果 Px 具有非线性控制函数的概率收缩，则 Tx 具有相同的概率收缩，于是我们有下面的定理.

定理 3.3 设非线性算子 P 具有非线性控制函数 φ 的概率收缩 $\Gamma(x)$，$x\in X$. 对$\forall\ x\in X$，$y\in Y$ 使 $x+\Gamma(x)y\in D(P)$ 且

(3.1) $FP(x+\Gamma(x)y)-Px-y(t)\geqslant Fy(\varphi(t))$，$t\geqslant0$，$\forall\ x\in D(P)$，$y\in Y$；

(3.2) $F\Gamma(x)y(t)\geqslant Fy\left(\frac{t}{B}\right)$，$t\geqslant0$，$\forall\ x\in D(P)$，$\forall\ y\in Y$，

则对$\forall\ u\in Y$，算子方程 $Px=u$ 有一解，如果 $\Gamma(x)$ 是满映射，则此解还是唯一的.

此时用来证明定理 3.3 的迭代程序为

$$x_{n+1}=x_n+\Gamma(x_n)(Px_n-u),n=0,1,2\cdots.$$
$$t_n-t_{n-1}=\varphi(t_{n+1}-t_n),n=1,2,\cdots.$$

证明 仿照定理 3.1 之证，于(3.1)中以 $-Px_n+u$ 代 y，可证

$$FPx_{n+1}-u(t)\geqslant FPx_0-u(\varphi^{n+1}(t)),t>0,$$
$$Fx_n-x_{n+1}(t)=F\Gamma(x_n)(Px_n-u)(t)\geqslant FPx_0-u\left(\varphi\left(\frac{t}{B}\right)\right),$$
$$Fx_n-x_m(Blt^*)=Fx_n-x_m(Bl\sum_{i=1}^{\infty}(t_i-t_{i-1}))\geqslant FPx_0-u(\varphi^n(t_1t)).$$

由以上各式可证 $Px_n\xrightarrow{\mathscr{T}}u$，$\{x_n\}$为$\mathscr{T}$ Cauchy 列，从而 $x_n\xrightarrow{\mathscr{T}}x_*$，由条件易知 $x_n\in D(P)$，故由 P 之闭性，立得 x_* 为方程 $Px=u$ 之一解，定理结论的其余部分同定理 3.1 之证，故略.

定理证毕.

对于形如下式的非线性算子方程

$$Px = x - Gx = u, \tag{*}$$

此处 $G: D(G) \subset X \to X$ 为一非线性闭算子，不等式(3.1)成为

$$FGx - G(x + \Gamma(x)y - (I - \Gamma(x)y(t) \geqslant Fy(\varphi(t)), t \geqslant 0 \tag{**}$$

$\forall\ y \in X, I$ 为恒同算子.

定理 3.4　对于非线性算子方程($*$)，以收缩不等式($**$)代替(3.1)，定理 3.3 的结论仍然成立.

参 考 文 献

[1] M. Altman, *Contractors and Contractor Directions, Theory and Applitions*, Marcel Dekker, New York(1977).

[2] A. C. H. Lee, W. Padgett, *Nonlinear Analysis*, T. M. A Vol3, No. 5, 707—715.

[3] 张石生，不动点理论及应用，重庆出版社，1984.

[4] 林熙，数学杂志，3(1983)，73—82.

[5] 曾文智，概率收缩与 PN 空间方程，数学研究与评论，1(1991)，47—51.

啊

Probability Contractors with Nonlinear Majorant Functions

Zeng Wenzhi

(Dept. of Math., Guizhou Univ., Guiyang)

Abstract

We give the concept of probability contractor with nonlinear majorant functions and obtain some results on the existence and uniqueness for solutions for some nonlinear functional equations in PN space, thus generalizing the results in [1], [5].