高维单形二面角的正弦定理及平分面的两个不等式*

冷岗松

(湖南教育学院数学系,长沙410012)

关于高维顶点角的正弦定理的研究已出现在距离在几何的近期文献中[1]~[2]. 本文则建立高维单形二面角的正弦定理,作为其应用,还证明了二面角平分面面积的两个不等式,这两个不等式是已知文献[5]~[7]结果的推广.

定理1 设 E^n 中的单形 Ω 的顶点集 $\tau=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$,$\Omega$ 的 n 维体积为 V,Ω 的第 i 个界面 Ω_i 的 $n-1$ 维体积为 V_i,界面 Ω_i,Ω_j 所夹的内二面角为 θ_{ij},顶点集 $\tau\setminus\{P_i,P_j\}$ 所支撑的 $n-2$ 维单形的体积为 $V_{\tau\setminus\{P_i,P_j\}}$,则对任意的 $i\neq j$ 有 $\dfrac{V_{\tau\setminus\{P_i,P_j\}}}{V_iV_j\sin\theta_{ij}}=\dfrac{n-1}{nV}$.

为证定理1,除利用距离几何中一些熟知的结论外,还需建立下面关键的

引理1.1 设单形 Ω 的顶点集 $\tau=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$,记向量 $x_i=\overline{P_0P_i}(i=1,2,\cdots,n)$,向量 x_i 关于 Ω 的第 i 个界面的正交分量为 y_i,向量 x_i,x_j 的夹角为 $\alpha_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则

$$\begin{pmatrix} 1 & & & -\cos\theta_{ij} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ -\cos\theta_{ij} & & & 1 \end{pmatrix}_{i,j=1}^{n\ -1}=(m_{ij}\cos\alpha_{ij})_{n\times n},$$

其中 $m_{ij}=\dfrac{\|x_i\|\,\|x_j\|}{\|y_i\|\,\|y_j\|}$.

值得指出,由引理1.1不难推出文献[1]~[4]中顶点角的正弦定理、文献[8]中的高维余弦定理.

设单形 Ω 的顶点集 $\tau=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$,$E$ 是棱 P_iP_j 上的一点,则点集 $\tau\setminus\{P_iP_j\}\cup E$ 所确定的 $n-1$ 维超平面叫做 θ_{ij} 的分角面. 一个与 Ω_i,Ω_j 所夹的内二面角相等的分角面叫做二面角 θ_{ij} 的平分面. 设 θ_{ij} 的平分面与棱 P_iP_j 的交点为 E,则 $\tau\setminus\{P_iP_j\}\cup E$ 这 n 个点所支撑的 $n-1$ 维单形的体积叫做 θ_{ij} 的平分面的面积,简记为 T_{ij}. 我们有

定理2 设 E^n 中的 n 维单形 Ω 的二面角 θ_{ij} 的平分面的面积为 T_{ij},则

(i) $\sum\limits_{0\leqslant i<j\leqslant n}T_{ij}^2\leqslant(\frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n}V_i)^2$;

(ii) $\prod\limits_{0\leqslant i<j\leqslant n}T_{ij}^2\leqslant\left(\prod\limits_{i=0}^{n}V_i\right)^{\frac{n}{2}}\left(\dfrac{n+1}{2n}\right)^{\frac{n(n+1)}{4}}$.

当 Ω 为正则单形时,(i),(ii)两式取等号.

为证定理2,需应用定理1建立下面的

* 1991年5月8日收到. 1992年5月4日收到修改稿.

引理 2.1 设 n 维单形 Ω 的二面角 θ_{ij} 的平分面的面积为 T_{ij}，则 $T_{ij}=\frac{2V_iV_j}{V_i+V_j}\cos\frac{\theta_{ij}}{2}$.

引理 2.2 对于 n 维单形 Ω 成立等式 $\sum_{i=0}^{n}V_i^2=2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}V_iV_j\cos\theta_{ij}$.

引理 2.3 对于 n 维单形 Ω 成立 $\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}\cos\frac{\theta_{ij}}{2}\leqslant\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{\frac{n(n+1)}{4}}$

在定理 2 中取 $n=2$，便得到文献[5]~[7]中的结果.

衷心感谢张景中、杨路研究员的热情关心的鼓励.

参 考 文 献

[1] F. Eriksson, Geometriac dedicate, 7(1978), 71—80;
[2] P. Bartoš, Časopis Pěst Mat, 93(1968), 273—277;
[3] 刘根洪，教学研究与评论，9：1(1989)，45—52；
[4] 尹景尧，教学的实践与认识，1(1987)，46—50；
[5] O. Bottema and others, *Geometric Inequalities*, Groningen, 1969
[6] H. W. Guggenheimer, Amer. Math. Monthly, 70(1963), 891;
[7] H. W. Guggenheimer, Amer. Math. Monthly, 71(1964), 687;
[8] 杨路，张景中，数学学报，23：3(1980) 740—749.