第14卷第2期 1994年5月 | 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION | Vol. 14 No. 2 May 1994

最佳有理L_∞逼近的存在性*

潘 杰

(合肥工业大学数力系,230009)

摘 要 设$R_f(p)\in R_n^m[a,b]$是函数f的最佳有理$L_p(1\leqslant p<\infty)$逼近,$E_f(p)=\|f-R_f(p)\|_p$.本文证明了$E_f(p)/(b-a)^{\frac{1}{p}}$是$p$的单调增加且有界的函数.当$f\in L_\infty$时,$f$的最佳有理$L_\infty$逼近必存在.

关键词 有理逼近,极限,存在性.

§1 引 言

设$f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的Lebesgue可测函数.记

$$L_p[a,b]=\{f(x):\ \|f\|_p=[\int_a^b|f(x)|^pdx]^{\frac{1}{p}}<\infty\},\quad 1\leqslant p<\infty;$$

$$L_\infty[a,b]=\{f(x):\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{[a,b]}|f(x)|<\infty\}.$$

显然,对于任一$p\in[1,\infty)$,有$L_\infty[a,b]\subset L_p[a,b]$.设$\Pi_n$是所有次数不超过$n$的实代数多项式的集合.记

$$R_n^m[a,b]=\{\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}:P_m\in\Pi_m,Q_n\in\Pi_n,\ Q_n(x)>0,x\in[a,b]\}.$$

设$f(x)\in L_\infty[a,b]$,对于任一给定的$p\in[1,\infty)$,定义一个最佳逼近函数$R_f(p,x)\in R_n^m[a,b]$和最佳逼近值$E_f(p)$如下:

$$E_f(p)=\|f-R_f(p)\|_p=\inf_{R\in R_n^m}\|f-R\|_p,\quad 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

对于任意给定的$p\in[1,\infty)$,J. M. Wolfe[3]证明了$R_f(p,x)$必是存在的.显然,当p变化时,$R_f(p,x)$和$E_f(p)$都是p的函数.在本文中,我们将利用$R_f(p,x)$ $(1\leqslant p<\infty)$的存在性以及$E_f(p)/(b-a)^{\frac{1}{p}}$的单调有界性来证明$R_f(\infty,x)$的存在性.

以后,在不致引起歧义的前提下,我们把$L_p[a,b]$,$L_\infty[a,b]$,$R_n^m[a,b]$和$R_f(p,x)$分别简记为L_p,L_∞,R_n^m和$R_f(p)$.

§2 主要结果

定理1 设$f\in L_\infty$,则$E_f(p)/(b-a)^{\frac{1}{p}}$是$p$的单调增加且有界的函数.从而$\lim\limits_{p\to\infty}E_f(p)/(b-$

* 1991年9月18日收到.

$a)^{\frac{1}{p}}$必存在.

证明 假定 $1\leqslant p<q<\infty$,由 $R_f(p)$的定义及 Hölder 不等式,可得

$$E_f(p)=\left[\int_a^b|f-R_f(p)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\left[\int_a^b|f-R_f(q)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant(b-a)^{\frac{q-p}{pq}}\left[\int_a^b|f-R_f(q)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}}=(b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}E_f(q).$$

所以,$E_f(p)/(b-a)^{\frac{1}{p}}$是 p 的增函数.再由

$$E_f(p)/(b-a)^{\frac{1}{p}}=\left[\int_a^b|f-R_f(p)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}/(b-a)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left[\int_a^b|f|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}/(b-a)^{\frac{1}{p}}\leqslant\|f\|_\infty$$

知 $E_f(p)/(b-a)^{\frac{1}{p}}$有界.从而$\lim\limits_{p\to\infty}E_f(p)/(b-a)^{\frac{1}{p}}$必存在.

若记 $m=\max\{b-a,1\}$,$E=\lim\limits_{p\to\infty}E_f(p)/(b-a)^{\frac{1}{p}}$,则我们还有

$$\lim_{p\to\infty}E_f(p)=E.$$

并且对任意的 $p\in[1,\infty)$,有 $E_f(p)\leqslant mE$.

定理 2 设 $f\in L_\infty$,则 $R_f(\infty)$必存在.并且 $\|f-R_f(\infty)\|_\infty=E$.

证明 首先,我们将 $R_f(p):=P_f(p)/Q_f(p)$正规化,使其满足 $\|Q_f(p)\|_\infty=1$.对任一 $p\in[1,\infty)$,由 Minkowski 不等式,有

$$\|R_f(p)\|_p\leqslant\|f-R_f(p)\|_p+\|f\|_p=E_f(p)+\|f\|_p\leqslant m(E+\|f\|_\infty).$$

即 $\|R_f(p)\|_p$有界.再由有限维线性空间范数的等价性及 Hölder 不等式可知,存在绝对常数 $\beta>0$,使得

$$\|P_f(p)\|_\infty\leqslant\beta\|P_f(p)\|_1=\beta\|R_f(p)\cdot Q_f(p)\|_1\leqslant\beta\|R_f(p)\|_1$$

$$\leqslant\beta(b-a)^{1-\frac{1}{p}}\|R_f(p)\|_p\leqslant\beta m^2(E+\|f\|_\infty):=M.$$

因此,对所有 $p\in[1,\infty)$,偶对$(P_f(p),Q_f(p))$位于由不等式 $\|P_f(p)\|_\infty\leqslant M$ 和 $\|Q_f(p)\|_\infty=1$ 所定义的紧集内.从而必存在序列$\{p_k\}$,$p_k\to\infty$,使得

$$P_f(p_k)\to P_f(\infty)\in\Pi_m,\ Q_f(p_k)\to Q_f(\infty)\in\Pi_n,\ (p_k\to\infty).$$

显然,$\|P_f(\infty)\|_\infty\leqslant M$,$\|Q_f(\infty)\|_\infty=1$.并且 $P_f(\infty)/Q_f(\infty)$在$[a,b]$上至多 n 个点处变为无穷(这些点即是 $Q_f(\infty)$在$[a,b]$上的零点),而在$[a,b]$上的其它点处 $P_f(\infty)/Q_f(\infty)$有定义,并且 $R_f(p_k)\to P_f(\infty)/Q_f(\infty)(p_k\to\infty)$.

任意给定一个充分小的正数 δ,可取总长度为 δ 的 n 个开区间 I_δ,使得 $Q_f(\infty)$的零点全在这些开区间内.在 $I=[a,b]\backslash I_\delta$ 上,$R_f(p_k)$一致收敛于 $P_f(\infty)/Q_f(\infty)$.在不等式

$$\left[\int_I|f-P_f(\infty)/Q_f(\infty)|^{p_k}dx\right]^{\frac{1}{p_k}}$$

$$\leqslant\left[\int_I|f-R_f(p_k)|^{p_k}dx\right]^{\frac{1}{p_k}}+\left[\int_I|R_f(p_k)-P_f(\infty)/Q_f(\infty)|^{p_k}dx\right]^{\frac{1}{p_k}}$$

$$\leqslant E_f(p_k)+\left[\int_I|R_f(p_k)-P_f(\infty)/Q_f(\infty)|^{p_k}dx\right]^{\frac{1}{p_k}}$$

中令 $p_k\to\infty$,即得

$$\operatorname*{ess\,sup}_I|f-P_f(\infty)/Q_f(\infty)|\leqslant E.$$

再由 δ 的任意性,可得

$$\| f - P_f(\infty)/Q_f(\infty) \|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{[a,b]} | f - P_f(\infty)/Q_f(\infty) | \leqslant E.$$

最后再证明，对任一 $R\in R_n^m$，都有 $\| f-R \|_\infty \geqslant E$. 如若不然，假设存在某 $\tilde{R}\in R_n^m$，使得 $\| f-\tilde{R} \|_\infty < E$. 则在不等式

$$E_f(p)/(b-a)^{\frac{1}{p}} = [\int_a^b |f - R_f(p)|^p dx]^{\frac{1}{p}}/(b-a)^{\frac{1}{p}} \leqslant [\int_a^b |f - \tilde{R}|^p dx]^{\frac{1}{p}}/(b-a)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \| f - \tilde{R} \|_\infty < E$$

中令 $p\to\infty$ 即得 $E<E$，矛盾. 所以，$R_f(\infty):=P_f(\infty)/Q_f(\infty)$ 是 f 的最佳 L_∞ 逼近，并且最佳逼近值为 E.

§3 结束语

一般说来，无论 f 在 $[a,b]$ 上是否连续，f 在 R_n^m 中的最佳 $L_p(1\leqslant p<\infty)$ 逼近都不一定是唯一的[5]. 当 f 在 $[a,b]$ 上不连续时，即使在多项式逼近的情形，其最佳 L_∞ 逼近也不一定是唯一的. 而当 $f\in C[a,b]$ 时，上述的 L_∞ 范数即是 Chebyshev 范数. 通常的连续函数最佳 Chebyshev 逼近的存在性定理[1]是本文定理 2 的特例. 并且这时的最佳逼近是唯一的. 另外，上述两定理可毫无困难地推广到 A. G. Egger[3]所考虑的紧 Hausdorff 空间上的 Borel 可测函数而用广义有理函数逼近的情形.

参 考 文 献

[1] 王仁宏，数值有理逼近，上海科学技术出版社，1980.

[2] 夏道行等，实变函数论与泛函分析，人民教育出版社，1979.

[3] J. M. Wolfe, *L_p rational approximation*, J. Approx. Theory 12(1974), 1—5.

[4] A. G. Egger, *Dependence on p of the best L^p approximation operator*, J. Approx. Theory 49(1987), 274—282.

[5] D. Braess, *On nonuniqueness in rational L_p approximation*, J. Approx. Theory 51(1987), 68—70.

Existence of Best Rational L_∞ Approximation

Pan Jie

(Hefei Polytechnical University)

Abstract

Let $R_f(p) \in \mathbf{R}_n^m[a,b]$ be the best rational L_p $(1 \leq p < \infty)$ approximation of function f, and let $E_f(p) = \|f - R_f(p)\|_p$. It is shown that $E_f(p)/(b-a)^{1/p}$ is an increasing and bounded function of p. If $f \in L_\infty[a,b]$, then the best rational L_∞ approximation of f exists.