第14卷第2期　　数学研究与评论　　Vol. 14 No. 2
1994年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1994

有序 Banach 空间中一类算子方程的正解*

胡适耕
(华中理工大学数学系, 武汉 430074)

摘　要　本文考虑有序 Banach 空间中形如 $x=y+Kf(\cdot,P_1x,\cdots,P_nx)$ 的算子方程，利用一定的不动点定理，得到了这类方程存在正解的某些充分条件.

关键词　有序 Banach 空间，算子方程，正解，不动点定理.

§1　引　言

给定紧度量空间 Ω 与有序 Banach 空间 $(X,|\cdot|,\leqslant)$, X 中的序 $\leqslant$ 由锥 X^+ 导入; 在 $Y\overset{\triangle}{=}C(\Omega,X)$ 中采用 sup 范数 $\|\cdot\|_0$. 给定线性算子 $P_i:D(P_i)\subset Y\to Y\,(1\leqslant i\leqslant n)$, 假定 $P_1=\mathrm{id}$, $Z=\bigcap_i D(P_i)\neq\{0\}$, $(P_1,\cdots,P_n):Z\subset Y\to Y^n$ 为闭线性算子. 令 $Y^+=C(\Omega,X^+)$, 假定 $Z^+\overset{\triangle}{=}Z\bigcap Y^+\neq\{0\}$. 给定 $y\in Z^+$, $K\in L(Y)$, $f\in C(\Omega\times X^+\times X^{n-1},X^+)$, 考虑算子方程

$$x=y+Kf(\cdot,P_1x,\cdots,P_nx),\tag{1}$$

其中 $f(\cdot,P_1x,\cdots,P_nx)$ 表函数 $t\mapsto f(t,P_1x(t),\cdots,P_nx(t))$ $(t\in\Omega)$. 若 $x\in Z^+$ 满足(1)且 $x(t)\not\equiv 0$, 则称 x 为方程(1)的正解. 若令 $Fx=Kf(\cdot,P_1x,\cdots,P_nx)$, $Tx=y+Fx$, 则方程(1)的正解无非是算子 T 的正不动点, 本文应用有关正不动点的存在定理来得出方程(1)有正解的某些充分条件.

方程(1)概括了多种积分方程与某些微分方程的边值问题, 因而本文有多种可能的应用. 本文给出了一个应用实例.

§2　正不动点的存在性

设 $(Z,\|\cdot\|,\leqslant)$ 是一有序 Banach 空间, 其中的序 $\leqslant$ 由锥 Z^+ 导入. 任给 $r>0$, 令 $Z_r^+=Z^+\bigcap B_r(0)$, $\partial Z_r^+=Z^+\bigcap\partial B_r(0)$. 给定 $T\in C(Z^+,Z^+)$, 以 $T'_+(x)$ 记 T 在 $x\,(x\in Z^+$ 或 $x=\infty)$ 沿 Z^+ 的 Frechét 导数, 以 $i(T,Z_r^+)$ 记 T 在 Z_r^+ 上关于 Z^+ 的不动点指数(假定其存在).

本文以 γ 记任何 Banach 空间中的 Kuratowski 非紧测度, 关于 γ 的基本性质依据[1, §7]. 任给 $\psi:D\subset E\to E_1$ (E,E_1 为 Banach 空间), 称

$$\gamma\mathrm{Lip}(\psi)\overset{\triangle}{=}\inf\{0<k\leqslant\infty\mid B\subset D\text{ 有界}\Rightarrow\gamma(\psi B)\leqslant\gamma(B)\}$$

为 ψ 的 γ-Lipschitz 模数.

* 1991年10月13日收到.

引理 2.1　设 $T\in C(Z^+,Z^+)$，$\gamma\mathrm{Lip}(T)<1$，$0<\tau\in \boldsymbol{R}$. 则以下条件(H_1)～(H_3)的任何一个推出 $i(T,Z_\tau^+)=1$，条件(H_4)～(H_6)的任何一个推出 $i(T,Z_\tau^+)=0$(在条件(H_2)(H_5)下要求 τ 充分小，在(H_3)(H_6)下要求 τ 充分大)：

(H_1)　$\forall\ x\in\partial Z_\tau^+$：$\|Tx\|\leqslant\|x\|$ 且 $Tx\neq x$；

(H_2)　$T(0)=0$；存在 $A=T'_+(0)\in L(Z)$，使当 $\lambda\in(0,1]$时$(Z^+\backslash\{0\})\cap N(I-\lambda A)=\varnothing$，$I=\mathrm{id}$；

(H_3)　存在 $B=T'_1(\infty)\in L(Z)$，$\forall\ \lambda\in(0,1]$：$(Z^+\backslash\{0\}\cap N(I-\lambda B)=\varnothing$；

(H_4)　存在 $e\in Z^+\backslash\{0\}$，$\forall\ \lambda\geqslant 0$，$\lambda e\overline{\in}(I-T)(\partial Z_\tau^+)$；

(H_5)　$T(0)=0$；存在 $A=T'_+(0)\in L(Z)$，$(Z^+\backslash\{0\})\cap N(I-A)=\varnothing$；$\exists\ \lambda\in(0,1)$，$(Z^+\backslash\{0\})\cap N(I-\lambda A)\neq\varnothing$；

(H_6)　存在 $B=T'_+(\infty)\in L(Z)$，使得$(Z^+\{0\})\cap N(I-B)=\varnothing$，$\exists\ \lambda\in(0,1)$，$(Z^+\backslash\{0\})\cap N(I-\lambda B)\neq\varnothing$.

以上引理可从[1,2,3]的有关结论得出. 其次，由关于不动点指数的熟知结论，若有 $0<r<p<\infty$，使得 $i(T,Z_r^+)\neq i(T,Z_p^+)$，则 T 必有正不动点 $x\in Z_p^+\backslash Z_r^+$(参考[1,2]). 于是引理 2.1 直接推出：

定理 2.1　设 $T\in C(Z^+,Z^+)$，$\gamma\mathrm{Lip}(T)<1$. 则在以下每种情况下 T 有正不动点：(i) T 满足条件(H_2)或在某个 ∂Z_r^+ 上满足条件(H_1)，且 T 满足条件(H_6)或在某个 $\partial Z_p^+(p>r>0)$上满足条件(H_4)；(ii)T 满足条件(H_5)或在某个 ∂Z_r^+ 上满足条件(H_4)，且 T 满足条件(H_3)或在某个 $\partial Z_p^+(p>r>0)$上满足条件(H_1).

§3　正解的存在性

以下设 $\Omega,X,X^+,Y,Y^+,Z,Z^+,P_i,y,f,F,T$ 如§1 中所述. 任给 $B\subset Y$，约定 $B(t)=\{x(t)\mid x\in B\}$，$B(\Omega)=\bigcup_{t\in\Omega}B(t)$. 假定 $K\in L(Y)$满足以下条件：

(**K**)　$KY^+\subset Z^+$；$K_i\overset{\triangle}{=}P_iK\in L(Y)$；存在 $k_i>0$，使对任何有界集 $B\subset Y$ 有

$$\gamma(K_iB)\leqslant k_i\gamma(B(\Omega))(1\leqslant i\leqslant n)；$$

存在 $\widetilde{K}:C^+(\Omega)\to C^+(\Omega)\overset{\triangle}{=}C(\Omega,\boldsymbol{R}_+)$，使对任给 $\psi\in C^+(\Omega)$，$a\in X$ 有 $K(\psi a)=(\widetilde{K}\psi)a$.

给定 $\varphi:\boldsymbol{R}_+^n\to\boldsymbol{R}_+$，它满足条件(在 $\boldsymbol{R}^n$ 中使用自然序)：

(H)　φ 次可加正齐次单调增，$\varphi(u)=0\Leftrightarrow u=0$.

任给 $x\in Z$，约定 $\|x\|_\varphi=\varphi(\|P_1x\|_0,\cdots,\|P_nx\|_0)$. 利用条件(H)及($P_1,\cdots,P_n$)的封闭性不难证明，$Z$ 依范数 $\|\cdot\|_\varphi$是一 Banach 空间，且 $\|x_k\|_\varphi\to 0\Leftrightarrow P_ix_k(t)\to 0(t\in\Omega,k\to\infty,1\leqslant i\leqslant n)$，因而 Z 的拓扑与 φ 的选取无关. 其次，易指明 Z 依 Z^+ 导入的序为有序 Banach 空间. 利用条件(**K**)，可验明 $T\in C(Z^+,Z^+)$. 以下总假定在 Z 中采用范数 $\|\cdot\|_\varphi$；约定 $W=X^+\times X^{n-1}$.

为应用定理 2.1 于方程(1)，需对算子 T 验证三类条件：(i)紧型条件：$\gamma\mathrm{Lip}(T)=\gamma\mathrm{Lip}(F)<1$；(ii)"零点条件"；(iii)"无穷远点条件". (ii)(iii)的含义在下文中自明. 关于这些条件的讨论构成下面的引理 3.1～3.7，而本文的主要结果乃由综合这些引理而得.

引理 3.1　若 f 满足条件

(C$_0$) 存在正齐次增函数 $\omega: R^n_+ \to R_+$，使对任何有界集 $V_1 \subset X^+$，$V_i \subset X (2 \leqslant i \leqslant n)$ 有

$$\gamma(f(\Omega \times V_1 \times \cdots \times V_n)) \leqslant \omega(\gamma(V_1), \cdots, \gamma(V_n)), \varphi(k_1, \cdots, k_n)\omega(\varphi_1^{-1}, \cdots, \varphi_n^{-1}) < 1/2,$$

其中 $k_1, \cdots, k_n$ 依条件(K)，$\varphi_i = \varphi(e_i)$，$\{e_i\}$ 是 R^n 的标准基，则 $\gamma\mathrm{Lip}(F) < 1$.

证明 任给有界集 $B \subset Z^+$，令 $V_i = (P_iB)(\Omega)$，则显然 $V_i \subset X$ 有界且 $V_1 \subset X^+$，从而由条件(C$_0$)有

$$\gamma(f(\Omega \times V_1 \times \cdots \times V_n)) \leqslant \omega(\gamma(V_1), \cdots, \gamma(V_n)). \tag{2}$$

(2)表明 $f(\Omega \times V_1 \times \cdots \times V_n)$ 有界，因此 $S \triangleq \{f(\cdot, P_1x, \cdots, P_nx) | x \in B\} \subset Y$ 有界，于是由条件(K)及(2)式有

$$\gamma(P_iFB) = \gamma(K_iS) \leqslant k_i\gamma(S(\Omega)) \leqslant k_i\omega(\gamma(V_1), \cdots, \gamma(V_n)). \tag{3}$$

令 $Q = FB$，$Q_i = P_iQ$. $\forall\ \varepsilon > 0$，取分解 $Q_i = \bigcup_{j=1}^{m} Q_{ij}$，使 $\mathrm{diam}(Q_{ij}) < \gamma(Q_i) + \varepsilon (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$，则

$$\begin{aligned}
\gamma(Q) &\leqslant \gamma(\bigcap_{i=1}^{n} P_i^{-1}Q_i) = \gamma(\bigcap_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} P_i^{-1}Q_{ij}) = \gamma(\bigcup_{(j_1, \cdots, j_n)} \bigcap_{i=1}^{n} P_i^{-1}Q_{ij_i}) \\
&\leqslant \max_{(j_1, \cdots, j_n)} \mathrm{diam}(\bigcap_{i=1}^{n} P_i^{-1}Q_{ij_i}) \leqslant \varphi(\gamma(Q_1) + \varepsilon, \cdots, \gamma(Q_n) + \varepsilon) \\
&\leqslant \varphi(\gamma(Q_1), \cdots, \gamma(Q_n)) + \varepsilon\varphi(1, \cdots, 1);
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \downarrow 0$ 并结合(3)得

$$\gamma(Q) \leqslant \varphi(k_1, \cdots, k_n)\omega(\gamma(V_1), \cdots, \gamma(V_n)). \tag{4}$$

取分解 $B = \bigcup_{j=1}^{p} B_j$，使 $\mathrm{diam}(B_j) < \gamma(B) + \varepsilon$；取定 $x_j \in B_j (1 \leqslant j \leqslant p)$. 再取分解 $\Omega = \bigcup_{l=1}^{q} \Omega_l$ 及 $t_l \in \Omega_l$，使 $|(P_ix_j)(t) - (P_ix_j)(t_l)| < \varepsilon (t \in \Omega, 1 \leqslant l \leqslant q, 1 \leqslant j \leqslant p, 1 \leqslant i \leqslant n)$. 任给 $x \in B_j, t \in \Omega_l$，有

$$\begin{aligned}
|(P_ix)(t) - (P_ix_j)(t_l)| &\leqslant \|P_ix - P_ix_j\|_0 + \varepsilon \leqslant \varphi_i^{-1}\|x - x_j\|_\varphi + \varepsilon \\
&\leqslant \varphi_i^{-1}\mathrm{diam}(B_j) + \varepsilon < \varphi_i^{-1}[\gamma(B) + \varepsilon] + \varepsilon \triangleq \rho_{i\varepsilon},
\end{aligned}$$

这表明 $V_i \subset \{(P_ix_j)(t_l) | 1 \leqslant j \leqslant p, 1 \leqslant l \leqslant q\} + B(0, \rho_{i\varepsilon})$.

因此 $\gamma(V_i) \leqslant 2\rho_{i\varepsilon}$；令 $\varepsilon \downarrow 0$ 得 $\gamma(V_i) \leqslant 2\varphi_i^{-1}\gamma(B)$. 结合(4)得

$$\gamma(FB) \leqslant 2\varphi(k_1, \cdots, k_n)\omega(\varphi_1^{-1}, \cdots, \varphi_n^{-1})\gamma(B),$$

因此 $\gamma\mathrm{Lip}(F) \leqslant 2\varphi(k_1, \cdots, k_n)\omega(\varphi_1^{-1}, \cdots, \varphi_n^{-1}) < 1$.

注 1 条件(C$_0$)显然可代以 f 全连续，即对任给有界集 $V_1 \subset X^+, V_2, \cdots, V_n \subset X$，$f(\Omega \times V_1 \times \cdots \times V_n)$ 相对紧，若 $\dim X < \infty$，则条件(C$_0$)平凡地满足.

引理 3.2 若 $y = 0$，f 满足条件

(C$_1$) 当 $(x_1, \cdots, x_n) \in W$，$\sum |x_i|$ 充分小时对一切 $t \in \Omega$ 有

$$|f(t, x_1, \cdots, x_n)| \leqslant \varphi(|x_1|, \cdots, |x_n|)/\varphi(\|K_1\|, \cdots, \|K_n\|),$$

则或者 T 有正不动点，或者对充分小的 $\tau > 0$，T 在 ∂Z_τ^+ 上满足条件(H$_1$)(依引理 2.1，下同).

若 f 满足

(A) 任给有界集 $V \subset W$，$f(\Omega \times V)$ 有界；

(C$_1'$) 存在 $0 < a < 1/\varphi(\|K_1\|, \cdots, \|K_n\|)$，使当 $(x_1, \cdots, x_n) \in W$，$\sum |x_i|$ 充分大时对一切 $t \in \Omega$ 有 $|f(t, x_1, \cdots, x_n)| \leqslant a\varphi(|x_1|, \cdots, |x_n|)$，

则或者 T 有正不动点，或者对充分大的 $\tau > 0$，T 在 ∂Z_τ^+ 上满足条件(H$_1$).

证明 只证引理的后半部分，前半部分的证明是类似的. 由条件(C$_1'$)，有 $\eta > 0$，使当 $(x_1,$

$\cdots,x_n)\in W,\varphi(|x_1|,\cdots,|x_n|)\geqslant\eta$ 时对一切 $t\in\Omega$ 有 $|f(t,x_1,\cdots,x_n)|\leqslant\alpha\varphi(|x_1|,\cdots,|x_n|)$. 由条件(A)，有 $\mu>0$，使当 $(t,x_1,\cdots,x_n)\in\Omega\times W,\varphi(|x_1|,\cdots,|x_n|)<\eta$ 时 $|f(t,x_1,\cdots,x_n)|\leqslant\mu$，取

$$\tau>\max\{\eta,\frac{\mu}{\alpha},\frac{\|y\|_\varphi}{1-\alpha\varphi(\|K_1\|,\cdots,\|K_n\|)}\},$$

则对任给 $x\in\partial Z_\tau^+$ 与 $1\leqslant i\leqslant n$ 有

$$\begin{aligned}\|P_iFx\|_0&=\|K_if(\cdot,P_1x,\cdots,P_nx)\|_0\leqslant\|K_i\|\ \|f(\cdot,P_1x,\cdots,P_nx)\|_0\\&\leqslant\|K_i\|\sup_{t\in\Omega}\max\{\mu,\alpha\varphi(|P_1x(t)|,\cdots,|P_nx(t)|)\}\\&\leqslant\|K_i\|\max\{\mu,\alpha\|x\|_\varphi\}=\|K_i\|\max\{\mu,\alpha\tau\}=\alpha\tau\|K_i\|;\\\|Fx\|_\varphi&\leqslant\alpha\tau\varphi(\|K_1\|,\cdots,\|K_n\|),\end{aligned}$$

于是 $\|Tx\|_\varphi\leqslant\|y\|_\varphi+\|Fx\|_\varphi\leqslant\tau=\|x\|_\varphi$. 可见或者有 $x\in\partial Z_\tau^+$ 使 $Tx=x$，或者 T 在 ∂Z_τ^+ 上满足条件(H_1).

注 2 由条件(H)推出，存在常数 $M,L>0$，对任何 $u=(u_i)\in R_+^n$ 有 $L\varphi(u)\leqslant\sum u_i\leqslant M\varphi(u)$. 这一事实在引理 3.3 及下面引理的证明中被用到.

注 3 显然条件(C_0)蕴含条件(A).

引理 3.3 若 $y=0$，f 满足条件

(C_2) 存在 $A_i(\cdot)\in C(\Omega,L(X))(1\leqslant i\leqslant n)$，使当 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in W$，$\sum|x_i|\to0$ 时关于 $t\in\Omega$ 一致地有 $f(t,x_1,\cdots,x_n)-\sum A_i(t)x_i=0(\sum|x_i|)$，且对任给 $\lambda\in(0,1]$，方程

$$x=\lambda\sum_{i=1}^nKA_iP_ix \tag{5}$$

无正解，(5)中 A_iP_ix 表函数 $A_i(t)P_ix(t)$，

则 T 满足条件(H_2).

证明 由 $y=0,f(t,0,\cdots,0)\equiv0$ 得 $T(0)=F(0)=0$. 令

$$Ax=\sum_{i=1}^nKA_iP_ix,\quad x\in Z, \tag{6}$$

则

$$\begin{aligned}\|P_iAx\|_0&\leqslant\sum_{j=1}^n\|K_iA_jP_jx\|_0\leqslant\sum_{j=1}^n\|K_i\|\sup_{t\in\Omega}\|A_j(t)\|\ \|P_jx\|_0\\&\leqslant\beta M\|K_i\|\ \|x\|_\varphi,\quad 1\leqslant i\leqslant n,\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $B=\sup\{\|A_j(t)\|\ |t\in\Omega,1\leqslant j\leqslant n\}$，$M$ 依法 2. 由(7)得

$$\|Ax\|_\varphi\leqslant\beta M\varphi\|K_1\|,\cdots,\|K_n\|)\|x\|_\varphi,$$

可见 $A\in L(Z)$，且 $\|A\|\leqslant\beta M\varphi(\|K_1\|,\cdots,\|K_n\|)$，$\forall\ \varepsilon>0$，由条件($C_2$)有 $\delta>0$，使当 $(t,x_1,\cdots,x_n)\in\Omega\times W,\varphi(|x_1|,\cdots,|x_n|)\leqslant\delta$ 时

$$|f(t,x_1,\cdots,x_n)-\sum_{i=1}^nA_i(t)x_i|\leqslant\varepsilon\varphi(|x_1|,\cdots,|x_n|).$$

于是当 $x\in Z^+$，$\|x\|_\varphi\leqslant\delta$ 时有

$$\begin{aligned}\|P_i(Fx-Ax)\|_0&=\|K_if(\cdot,P_1x,\cdots,P_nx)-\sum_{j=1}^nK_iA_jP_jx\|_0\\&\leqslant\|K_i\|\ \|f(\cdot,P_1x,\cdots,P_nx)-\sum_{j=1}^nK_iA_jP_jx\|_0\leqslant\varepsilon\|K_i\|\ \|x\|_\varphi;\end{aligned}$$

$$\| Fx - Ax \|_\varphi \leqslant \varepsilon\varphi(\| K_1 \|, \cdots, \| K_n \|) \| x \|_\varphi,$$

这表明 $T'_t(0)=F'_+(0)=A$. 其次注意到方程(5)无正解 $\Leftrightarrow (Z^+\setminus\{0\})\cap N(I-\lambda A)=\varnothing$,可见条件($H_2$)满足.

注 4 以 $r_\sigma(A)$ 记 A 的谱半径,则依上面的记号有 $r_\sigma(A)\leqslant \| A \| \leqslant \beta M\varphi(\| K_1 \|, \cdots, \| K_n \|)$. 因此当

$$\sup_{t\in\Omega,1\leqslant i\leqslant n} \| A_i(t) \| < 1/M\varphi(\| K_1 \|, \cdots, \| K_n \|) \tag{8}$$

时 $r_\sigma(A)<1$,从而对 $\lambda\in(0,1]$ 方程(5)必无正解. 条件(8)有点强,但可能容易检验些.

引理 3.4 若 f 满足条件(A)与条件

(C_3) 存在 $B_i(\cdot)\in C(\Omega,L(X))(1\leqslant i\leqslant n)$,使当 $(x_1,\cdots,x_n)\in W$, $\sum |x_i|\to\infty$ 时关于 $t\in\Omega$ 一致地有 $f(t,x_1,\cdots,x_n)-\sum B_i(t)x_i=o(\sum |x_i|)$,且对任给 $\lambda\in(0,1]$ 方程

$$x=\lambda\sum_{i=1}^n KB_iP_ix \tag{9}$$

无正解,(9)中 B_iP_ix 表函数 $B_i(t)P_ix(t)$,

则 T 满足条件(H_3).

证明 类似于证引理 3.3,由

$$Bx=\sum_{i=1}^n KB_iP_ix \quad (x\in Z) \tag{10}$$

定义出 $B\in L(Z)$. $\forall\ \varepsilon>0$,由条件(C_3)有 $\eta>0$,使当 $(t,x_1,\cdots,x_n)\in\Omega\times W$, $\varphi(|x_1|,\cdots,|x_n|)\geqslant\eta$ 时有

$$|f(t,x_1,\cdots,x_n)-\sum_{i=1}^n B_i(t)x_i| \leqslant \varepsilon\varphi(|x_1|,\cdots,|x_n|). \tag{11}$$

由条件(A)有 $\mu>0$,使当 $(t,x_1,\cdots,x_n)\in\Omega\times W$, $\varphi(|x_1|,\cdots,|x_n|)<\eta$ 时有 $|f(t,x_1,\cdots,x_n)|\leqslant\mu$. 令 $\beta=\sup\{\| B_i(t) \| \mid t\in\Omega,1\leqslant i\leqslant n\}$,则当 $(t,x_1,\cdots,x_n)\in\Omega\times W$, $\varphi(|x_1|,\cdots,|x_n|)<\eta$ 时有

$$\begin{aligned}|f(t,x_1,\cdots,x_n)-\sum_{i=1}^n B_i(t)x_i| &\leqslant \mu+\beta\sum_{i=1}^n |x_i| \\ &\leqslant \mu+\beta M\varphi(|x_1|,\cdots,|x_n|)<\mu+M\beta\eta,\end{aligned} \tag{12}$$

其中 M 依注 2. 若 $x\in Z^+$, $\| x \|_\varphi\geqslant\max\{\eta,(\mu+M\beta\eta)/\varepsilon\}$,则由(11),(12)有

$$\begin{aligned}\| P_i(Fx-Bx) \|_0 &\leqslant \| K_i \| \, \| f(\cdot,P_1x,\cdots,P_nx)-\sum_{j=1}^n B_jP_jx \|_0 \\ &\leqslant \| K_i \| \sup_{t\in\Omega}\max\{\mu+M\beta\eta,\varepsilon\varphi(|P_1x(t)|,\cdots,|P_nx(t)|)\} \\ &\leqslant \| K_i \| \max\{\mu+M\beta\eta,\varepsilon \| x \|_\varphi\}=\varepsilon \| K_i \| \, \| x \|_\varphi; \\ \| Fx-Bx \|_\varphi &\leqslant \varepsilon\varphi(\| K_1 \|,\cdots,\| K_n \|) \| x \|_\varphi,\end{aligned}$$

这表明 $T'_x(\infty)=F'_+(\infty)=B$,由此易见条件($H_3$)满足.

注 5 条件"$\forall\ \lambda\in(0,1]$:方程(9)无正解"可代以较强的条件"$\sup\{\| B_i(t) \| \mid t\in\Omega,1\leqslant i\leqslant n\}<1/M\varphi(\| K_1 \|, \cdots, \| K_n \|)$"(参照注 4).

若 X 中任何有上(下)界的序列必有上(下)确界,则说 X(依序 $\leqslant$)是序完备的. 下面以 $X\subset Z$ 表 X 可自然地嵌入 Z,即对每个 $a\in X$,当 $x(t)\equiv a$ 时 $x\in Z$.

引理 3.5 若 X 序完备, $X\subset Z$, f 满足条件

(C_4)((C'_4)) 存在 $\psi\in C^+(\Omega)$ 与 $\tau>0$(充分大),使当 $(t,x_1,\cdots,x_n)\in\Omega\times W$, $\sum |x_i|\leqslant\tau$ 时

有 $f(t,x_1,\cdots,x_n)\geqslant\psi(t)x_1$，且 $\beta\overset{\triangle}{=}\inf\limits_{t\in\Omega}\widetilde{K}\psi(t)>1$（$\widetilde{K}$ 依条件(K)），

则或者 T 有正不动点，或者对某个充分小(充分大)的 $r>0$，T 在 ∂Z_r^+ 上满足条件(H_4).

证明 取定 $x_0\in X^+\backslash\{0\}$，令 $e(t)\equiv x_0(t\in\Omega)$，则 $0\neq e\in Z^+$. 不妨只考虑条件(C_4)满足的情况. 取充分小的 $r>0$，使 $\varphi(u)\leqslant r\Rightarrow\sum u_i\leqslant\tau(u=(u_i)\in R_+^n)$. 若引理结论不真，则有 $\lambda>0$，$x\in\partial Z_r^+$，使得 $\lambda e=x-Tx$，从而 $x=\lambda e+Tx\geqslant\lambda e$，$x\geqslant Tx\geqslant Fx$. Ω 作为紧度量空间必可分，因此有可数稠密子集 $\{t_k\}\subset\Omega$. 由 $x(t)\geqslant\lambda x_0(t\in\Omega)$ 及 X 的序完备性知存在 $a=\inf\limits_k x(t_k)\geqslant\lambda x_0$；再用连续性得出 $a=\inf\limits_{t\in\Omega}x(t)$. $\forall\, t\in\Omega$，由 $x\geqslant Fx$，条件(C_4)及条件(K)得出

$$\begin{aligned}x(t)&\geqslant Fx(t)=Kf(t,P_1x(t),\cdots,P_nx(t))\geqslant K(\psi(t)x(t))\\&\geqslant K(\psi(t)a)=(\widetilde{K}\psi(t))a\geqslant\beta a,\end{aligned}$$

于是 $a\geqslant\beta a$. 再由 $\beta>1$ 推出 $a=\beta a$，从而 $0=(\beta-1)a\geqslant(\beta-1)\lambda x_0\neq 0$，得出矛盾.

引理 3.6 若 f 满足条件

(C_5) 存在如条件(C_2)所述的 $A_i(t)$，使得对某个 $\lambda\in(0,1)$，方程(5)有正解，而方程

$$x=\sum_{i=1}^n KA_iP_ix \tag{13}$$

(记号依引理 3.3)无正解，

则当 $y=0$ 时 T 满足条件(H_5).

证明类似于引理 3.3，从略.

注 6 设 A 定义如(6). 若能验证 A 是强正的紧线性算子，$\lambda^{-1}=r_\sigma(A)>1$，则由[1, Th. 19.3]知方程(5)有正解而方程(13)无正解.

引理 3.7 若 f 满足条件(A)与条件

(C_6) 存在如条件(C_3)所述的 $B_i(t)$，使得对某个 $\lambda\in(0,1]$ 方程(7)有正解，而方程

$$x=\sum_{i=1}^n KB_iP_ix \tag{14}$$

(记号依引理 3.4)无正解，

则 T 满足条件(H_6).

证明类似于 3.4，从略.

注 6 稍加修改后亦可用于引理 3.7.

综合引理 3.1～3.7 并利用定理 2.1，即得本文主要结果：

定理 3.1 设 f 满足条件(C_0). 则在以下任何一种情况下方程(1)有正解：

(i) f 满足条件(C_1)(或(C_2))(C_6)且 $y=0$；

(ii) f 满足条件(C_1)(或(C_2))(C_4')，$y=0$，$X\subset Z$ 且 X 序完备；

(iii) f 满足条件(C_1')(或(C_3))(C_4)，$X\subset Z$ 且 X 序完备；

(iv) f 满足条件(C_1')(或(C_3))(C_5)，且 $y=0$.

以上涉及条件(C_1)(C_1')时，认定其中用到的 φ 与条件(C_0)中的 φ 一致.

§4 应用举例

考虑两点边值问题

$$\ddot{x}=f(t,x,\dot{x})(0\leqslant t\leqslant 1),x(0)+\dot{x}(0)=\dot{x}(1)=0, \tag{15}$$

其中 $f\in C(J\times X^{+}\times X,X^{+})$，$J=[0,1]$. 用标准的方法将问题(15)化为积分方程(如参考[4])

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s),\dot{x}(s))ds, \tag{16}$$

其中 Green 函数 $G(t,s)$ 为

$$G(t,s)=\begin{cases}1-s, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1;\\ 1-t, & 0\leqslant t<s\leqslant 1.\end{cases} \tag{17}$$

令 $Y=C(J,X)$，$Y^{+}=C(J,X^{+})$，$P_1=\mathrm{id}$，$P_2=d/dt$，$Z=C^1(J,X)$，

$$Kx(t)=\int_0^1 G(t,s)x(s)ds\quad(t\in J), \tag{18}$$

则 $K\in L(Y)$ 且 $\|K\|\leqslant 1$，$KY^{+}\subset Z^{+}\overset{\triangle}{=}Z\cap Y^{+}$，且

$$K_2x(t)=(Kx)'(t)=\int_0^1 G_2(t,s)x(s)ds, \tag{19}$$

其中 $G_2(t,s)=\partial_t G(t,s)(t\neq s)$，由此得 $K_2\in L(Y)$，$\|K_2\|\leqslant 1$.

任给有界集 $B\subset Y$，易验知 $Q\overset{\triangle}{=}KB$ 等度连续，于是由[1]之命题 7.3 有 $\gamma(Q)=\sup\limits_J \gamma(Q(t))$. 设 $V=B(J)\subset B_\rho(0)\subset X$. 取定 $t\in J$，$\forall\ \varepsilon>0$，取分划 $0=s_0<s_1<\cdots<s_m=t$，使 $s_j-s_{j-1}<\varepsilon(1\leqslant j\leqslant m)$. 则

$$\begin{aligned}\gamma(\{\int_0^t(1-s)x(s)ds\,|\,x\in B\})&\leqslant t\gamma(\{(1-s)x(s)\,|\,s\in[0,t],x\in B\})\leqslant t\gamma([0,t]\times V)\\&\leqslant \max_j t\gamma(\bigcup_{s\in[s_{j-1},s_j]}sV)\leqslant \max_j t\gamma(s_jV)+2t\varepsilon\rho\\&\leqslant t^2\gamma(V)+2\varepsilon\rho.\end{aligned}$$

类似地有 $\gamma(\{\int_t^1(1-t)x(s)ds\,|\,x\in B\})\leqslant(1-t)^2\gamma(V)$. 合并以上两式并令 $\varepsilon\downarrow 0$ 得 $\gamma(Q(t))\leqslant[t^2+(1-t)^2]\gamma(V)\leqslant\gamma(V)$，因此 $\gamma(KB)\leqslant k_1\gamma(B(J))$，$k_1=1$. 类似地有 $\gamma(K_2B)\leqslant k_2\gamma(B(J))$，$k_2=1$. 至此已可断定 K 满足条件(K). 其次易见 $(\mathrm{id},d/dt):Z\subset Y\to Y^2$ 是闭线性算子，而方程(16)可表为算子方程 $x=Kf(\cdot,P_1x,P_2x)$，因此可用定理 3.1 得出问题(15)有正解的一系列充分条件. 例如，应用定理 3.1 之(iv)并取 $\varphi(u)=\omega(u)/\alpha=\max(u_1,u_2)$ 得到：

定理 4.1　设存在 $0<\alpha<1/2$，使对任何有界集 $U\subset X^{+}$，$V\subset X$ 有

$$\gamma(f(J\times U\times V))\leqslant\alpha\max(\gamma(U),\gamma(V));$$

存在 $A_i,B_i\in C(J,L(X))$ $(i=1,2)$，使当 $x\in X^{+}$，$y\in X$，$|x|+|y|\to 0$ 时关于 $t\in J$ 一致地有

$$f(t,x,y)-A_1(t)x-A_2(t)y=o(|x|+|y|),$$

而 $|x|+|y|\to\infty$ 时关于 $t\in J$ 一致地有 $f(t,x,y)-B_1(t)x-B_2(t)y=o(|x|+|y|)$；存在 $\lambda_1\in(0,1)$，使得边值问题

$$\ddot{x}=\lambda_0[A_1(t)x+A_2(t)\dot{x}],\ x(0)+\dot{x}(0)=\dot{x}(1)=0 \tag{20}$$

有正解；而对任何 $\lambda\in(0,1]$，以下边值问题

$$\ddot{x}=\lambda[B_1(t)x+B_2(t)\dot{x}],\ x(0)+\dot{x}(0)=\dot{x}(1)=0; \tag{21}$$

$$\ddot{x}=A_1(t)x+A_2(t)\dot{x},\ x(0)+\dot{x}(0)=\dot{x}(1)=0 \tag{22}$$

无正解. 则边值问题(15)有正解.

注 7 线性边值问题(20)～(22)一般说来要比原边值问题(15)简单些，在某些具体情况下，前者可通过实际计算求解.

注 8 讨论问题(20)～(22)时可利用注 4～6. 例如，若 $A_2(t)=0$，$A_1(t)$是强正的紧算子，则由 $Ax(t)=\int_0^1 G(t,s)A_1(s)x(s)ds$ 定义出强正的紧算子 $A\in L(Z)$，于是当 $\lambda_0^{-1}=r_\sigma(A)>1$ 时问题(20)有正解，而问题(22)无正解.

注 9 对于 2 阶边值问题的正解，文[5]作了精细的讨论；关于类似于(15)的抽象边值问题，[6]给出了某些结果. 本文所用的方法与结果较诸已知文献都有所不同.

参 考 文 献

[1] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer—Verlag, Berlin, 1985.

[2] 郭大钧，非线性泛函分析，山东科学技术出版社，1985.

[3] H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, SIAM Rev. 18(1976), 620～709.

[4] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, 2ed, Birkhäuser, Boston, 1982.

[5] 孙经先，非线性 Hammerstein 型积分方程正解的存在性及其应用，数学年刊，9A:1(1988)，90～96.

[6] V. Lakshmikanthan, *Abstract Boundary Value Problems*, in "*Nonlinear Equations in Abstract Spaces*", 117—123, Academic Press, New York, 1978.

Positive Solutions of a Class of Operator Equations in Ordered Banach Spaces

Hu Shigeng

(Dept. of Math., Huazhong Univ. of Sci. and Tech., Wuhan)

Abstract

In this paper we consider operator equations in ordered Banach spaces of the form $x=y+Kf(\cdot,P_1x,\cdots,P_nx)$. By means of some fixed point theorems, we obtain some sufficient conditions for such an equation to have positive solutions.