第14卷第2期　　数学研究与评论　　Vol. 14 No. 2
1994年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1994

关于单位圆内零级亚纯函数的Borel点*

高　宗　升
(河南师范大学数学系，新乡 453002)

摘　要　本文证明，对于单位圆内的零级亚纯函数，在其圆周上至少存在一个关于其型函数的Borel点.

关键词　亚纯函数，型函数，Borel点.

关于单位圆内亚纯函数与其Borel点之间的关系，是一个十分有趣的问题. Valiron，李国平等人曾作过许多重要研究[1]. 对于单位圆内有限正级亚纯函数，李国平证明在$|z|=1$上至少存在一个关于其型函数的Borel点. 但是对于圆内零级亚纯函数，他指出："非常遗憾的是，我们至今还不能推广这结果到零级的函数中去."([1]，P180). 虽然这个问题提出至今已有三十多年，但据笔者所知，该问题至今尚无人解决，本文研究并解决了上述问题.

定义1　设$f(z)$为$|z|<1$内亚纯函数，$T(r,f)$为$f(z)$的Nevanlinna特征函数，如果

$$\overline{\lim_{r\to1}}\frac{\ln T(r,f)}{\ln\frac{1}{1-r}}=0,\quad \underline{\lim_{r\to1}}\frac{T(r,f)}{\ln\frac{1}{1-r}}=\infty \tag{1}$$

则称$f(z)$为$|z|<1$内零级亚纯函数.

定理A(Valiron[1])　设$f(z)$为$|z|<1$内零级亚纯函数，则存在单调正值连续可微函数$W(X)=W(\ln\frac{1}{1-r})$，满足如下条件

1)　$\frac{1}{2}W(X_n)<T(r_n,f)$，$W(X)\geqslant T(r,f)$，其中$X_n=\ln\frac{1}{1-r_n}$，$r_n\to1\ (n\to\infty)$，

2)　$\frac{W'(X)}{W(X)}$不增且$\lim\limits_{X\to\infty}\frac{W'(X)}{W(X)}=0$，

3)　$\frac{W(X+\ln h)}{W(X)}<k(h)$，$\frac{W'(X+\ln h)}{W'(X)}<k(h)$.

其中h为大于1的任何正数，$k(h)$为h有关的正常数.

定义2　我们称$f(z)$的满足定理A中1)，2)，3)的函数$W(X)$为$f(z)$的型函数.

由(1)和1)，我们立刻知道$\frac{W(X)}{X}\to+\infty$. $(r\to1)$. 另外，由1)，$\ln\frac{1}{2}W(X_n)<\ln T(r_n,f)$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln T(r_n,f)}{\ln W(X_n)}\geqslant1,\quad 即\overline{\lim_{r\to1}}\frac{\ln T(r,f)}{\ln W(X)}\geqslant1. \tag{2}$$

又因

$$W(X)\geqslant T(r,f),\quad 则\overline{\lim_{r\to1}}\frac{\ln T(r,f)}{\ln W(X)}\leqslant1, \tag{3}$$

* 1991年9月21日收到. 河南省教委及河南师范大学青年科学基金资助.

由(2),(3)可知,若 $W(X)$ 为 $f(z)$ 的型函数,则 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\frac{\ln T(r,f)}{\ln W(X)}=1$,其中 $W(X)=W(\ln\frac{1}{1-r})$.

定义 3 设 $f(z)$ 为 $|z|<1$ 内零级亚纯函数,$W(X)=W(\ln\frac{1}{1-r})$ 为其型函数,若对于任意复数 a(至多除去两个例外)以及任意 $\varepsilon>0$,函数 $n(r,f=a,|\arg z-\theta|<\varepsilon)$(它表示区域 $\{|z|<r\}\cap\{|\arg z-\theta|<\varepsilon\}$ 内函数 $f(z)-a$ 的零点个数)恒满足

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{\ln T(r,f=a,|\arg z-\theta|<\varepsilon)}{\ln\frac{1}{1-r}+\ln W(\ln\frac{1}{1-r})}=1,$$

则称 $e^{i\theta}$ 为 $f(z)$ 关于型函数 $W(\ln\frac{1}{1-r})$ 的 Borel 点.

引理 设 $f(z)$ 为 $|z|<1$ 内零级亚纯函数,$W(X)$ 为其型函数,若 $T_0(r,f)$ 为 $f(z)$ 的 Ahlfors—Shimizu 特征函数[2],则

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{\ln T_0(r,f)}{\ln W(X)}=\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{\ln S(r,f)}{\ln W(X)+X},\tag{4}$$

其中 $T_0(r,f)=\int_0^r\frac{S(t)}{t}dt\ (0<r<1)$,$S(t)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<r}(\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2})^2 rdrd\theta$,$X=\ln\frac{1}{1-r}$.

证明 由[2],$T_0(r,f)=T(r,f)+O(1)$,所以 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\frac{\ln T_0(r,f)}{\ln W(X)}=1$.因为

$$T_0(\frac{3+r}{4},f)\geqslant\int_r^{\frac{3+r}{4}}\frac{S(t)}{t}dt\geqslant S(r)(1-r)\frac{3}{4},$$

所以由型函数的性质 3),$\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{\ln S(r)-\ln\frac{1}{1-r}}{\ln W(X)}\leqslant\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{\ln T_0(\frac{3+r}{4},f)}{\ln W(X)}=1$,于是,对于 $\forall\ \eta>0$,当 r 充分靠近 1 时,有 $\dfrac{\ln S(r)-\ln\frac{1}{1-r}}{\ln W(X)}<1+\eta$,即 $\ln S(r)<\ln W(X)+\ln\frac{1}{1-r}+\eta\ln W(X)$.

注意到 $\lim\limits_{X\to\infty}\frac{\ln W(X)}{X}=0$,从而由上式可以推出

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{\ln S(r)}{\ln\frac{1}{1-r}+\ln W(X)}=\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{\ln S(r)}{X+\ln W(X)}\leqslant 1.\tag{5}$$

为了完成引理的证明,我们只需证明(5)中 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\frac{\ln S(r)}{X+\ln W(X)}<1$ 不可能成立即可.

若 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\frac{\ln S(r)}{X+\ln W(X)}<1$,那么存在充分小的正数 ε_0,使当 r 充分靠近 1 时,有

$$\frac{\ln S(r)}{\ln W(X)+X}<1-\varepsilon_0\quad 即\ S(r)<\{\frac{1}{1-r}W(X)\}^{1-\varepsilon_0}$$

于是

$$\begin{aligned}T_0(r,f)&=\int_0^r\frac{S(t)}{t}dt=\int_{\frac{1}{2}}^r\frac{S(t)}{t}dt+C<C\{W(\ln\frac{1}{1-r})\}^{1-\varepsilon_0}\int_{\frac{1}{2}}^r(\frac{1}{1-t})^{1-\varepsilon_0}dt\\&=C\{W(\ln\frac{1}{1-r})\}^{1-\varepsilon_0}.\end{aligned}$$

因此 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\frac{\ln T_0(r,f)}{\ln W(X)}\leqslant 1-\varepsilon_0$,即 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\frac{\ln T_0(r,f)}{\ln W(X)}<1$. 此与 $W(X)$ 为 $f(z)$ 的型函数矛盾.

下面叙述并证明本文的主要结果.

定理 设 $f(z)$ 为 $|z|<1$ 内的零级亚纯函数, $W(\ln\frac{1}{1-r})$ 为其型函数, 那么在 $|z|=1$ 上至少存在 $f(z)$ 关于型函数 $W(\ln\frac{1}{1-r})$ 的一个 Borel 点.

证明 由于 $W(\ln\frac{1}{1-r})$ 为 $f(z)$ 的型函数, 从而 $\overline{\lim\limits_{r\to1}}\frac{\ln T_0(r,f)}{\ln W(\ln\frac{1}{1-r})}=1$, 由引理知

$$\overline{\lim_{r\to1}}\frac{\ln S(r)}{\ln\frac{1}{1-r}+\ln W(\ln\frac{1}{1-r})}=1, \tag{6}$$

其中 $T_0(r,f)$ 为 $|z|<1$ 内 $f(z)$ 的 Ahlfors—shimizu 特征函数,

$$S(r)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|<r}\frac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}rdrd\theta.$$

把圆 $\Delta:|z|<1$ 等分成两个半圆域 $\Delta^{(1)},\Delta^{(2)}$, 由(6), 其中至少有一个半圆域, 不妨记为 $\Delta^{(1)}$, 满足

$$\overline{\lim_{r\to1}}\frac{\ln S(r,\Delta^{(1)})}{\ln\frac{1}{1-r}+\ln W(\ln\frac{1}{1-r})}=1. \tag{7}$$

记 $\Delta^{(1)}=\Delta_1, S(r,\Delta_1)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Delta_1}\frac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}rdrd\theta.$

再把 Δ_1 等分成两个角形域 $\Delta_1^{(1)},\Delta_1^{(2)}$, 由(7), 其中至少存在一个角形域, 设为 $\Delta_1^{(2)}$, 满足

$$\overline{\lim_{r\to1}}\frac{\ln S(r,\Delta_1^{(2)})}{\ln\frac{1}{1-r}+\ln W(\ln\frac{1}{1-r})}=1. \tag{8}$$

记 $\Delta_1^{(2)}=\Delta_2$, 则 $\Delta_1\supset\Delta_2$. 如此一直进行下去, 我们得到一个角形域序列 $\{\Delta_n\}$, 满足

1°) $\Delta_1\supset\Delta_2\supset\cdots\supset\Delta_n\supset\Delta_{n+1}\supset\cdots$;

2°) 角形 Δ_n 所对应的张角 $\theta_n=\frac{2\pi}{2^n}\to0$;

3°) 对于每一 Δ_n, 有 $\overline{\lim\limits_{r\to1}}\frac{\ln S(r,\Delta_n)}{\ln\frac{1}{1-r}+\ln W(\ln\frac{1}{1-r})}=1$.

由 1°), 2°) 立即可知 Δ_n 收敛于单位圆内的一条半径 J: $\arg z=\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$. J 与 $|z|=1$ 有一个交点 z_0, $z_0=e^{i\theta}$. 下面我们证明 $e^{i\theta}$ 即为 $f(z)$ 的一个 Borel 点.

由[3]中定理Ⅶ. 14,

$$S(r,\Delta_n)\leqslant9\sum_{i=1}^{3}n(\frac{r+3}{4},a_i,\Delta_{n-1})+O(\frac{1}{1-r}), \tag{9}$$

其中 $a_i(i=1,2,3)$ 为三个不同的常数, $n(\frac{r+3}{4},a_i,\Delta_{n-1})$ 表示 $f(z)-a_i$ 在角形域 $\Delta_{n-1}(\frac{r+3}{4})$ 内的零点个数. $\Delta_n(r)$ 表示 $|z|<r$ 内张角为 $\frac{2\pi}{2^n}$ 的角形域.

由(9) $S(r,\Delta_n)\leqslant C\sum\limits_{i=1}^{3}n(\frac{r+3}{4},a_i,\Delta_{n-1})$, 该式表明对于每一复数 a(至多除去两个例外)恒

有 $S(r,\Delta_n) \leqslant Cn(\frac{r+3}{4},a,\Delta_{n-1})$，于是

$$\overline{\lim_{r\to1}} \frac{\ln n(\frac{r+3}{4},a,\Delta_{n-1})}{\ln \frac{1}{1-\frac{r+3}{4}} + \ln W(\ln \frac{1}{1-\frac{r+3}{4}})} \geqslant \overline{\lim_{r\to1}} \frac{\ln S(r,\Delta_n) - \ln C}{\ln \frac{1}{1-\frac{r+3}{4}} + \ln W(\ln \frac{1}{1-\frac{r+3}{4}})} = 1.$$

即 $\overline{\lim\limits_{r\to1}} \dfrac{\ln n(r,a,\Delta_n)}{\ln \frac{1}{1-r} + \ln W(\ln \frac{1}{1-r})} \geqslant 1.$

因为 $\Delta_n \to J: \arg z = \theta$，故对 $\forall\ \varepsilon > 0$ 及任意复数 a(至多除去两个例外)恒有

$$\overline{\lim_{r\to1}} \frac{\ln n(r,r=a,|\arg z-\theta|<\varepsilon)}{\ln \frac{1}{1-r} + \ln W(\ln \frac{1}{1-r})} \geqslant 1. \tag{10}$$

另一方面，注意到

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}(1-r)n(r,a,\Delta_n) &\leqslant (\frac{3+r}{4}-r)n(r,f=a) \leqslant \int_r^{\frac{3+r}{4}} \frac{n(t)(f=a)}{t}dt \\ &\leqslant N(\frac{3+r}{4},f=a) \leqslant (1+O(1))T(\frac{3+r}{4},f) \\ &\leqslant \{W(\ln \frac{1}{1-r})\}^{1+\varepsilon},\end{aligned}$$

则 $\ln n(r,a,\Delta_n) \leqslant (1+\varepsilon)\ln W(\ln \frac{1}{1-r}) + \ln \frac{1}{1-r} + C$，即 $\overline{\lim\limits_{r\to1}} \dfrac{\ln n(r,a,\Delta_n)}{\ln \frac{1}{1-r} + \ln W(\ln \frac{1}{1-r})} \leqslant$ 1. 注意到 Δ_n 的性质并联系到(11)式，定理获证.

参 考 文 献

[1] 李国平，半纯函数的聚值线理论，科学出版社，北京，1958，160—180.

[2] L. V. Ahlfors, Congr. Math. Scand. Oslo., 7(1929), 84—88.

[3] M. Tsuji, *Potential Theory in Modern Function Theory*, Moruzen, Tokyo, 1959.

[4] 余家荣，数学年刊，3(1982)，545—554.

On the Borel Point of Meromorphic Function of Zero Order in the Circle

Gao Zongsheng

(Henan Normal University)

Abstract

We solve a problem posed by Prof. Li Guoping which states that for the meromorphic function of zero order in the unit circle, there is at least one Borel point about its type function.