第 14 卷第 2 期
1994 年 5 月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 14 No. 2
May 1994

强拓扑的可赋范化与可度量化*

吴从炘　　卜庆营
(哈尔滨工业大学数学系，哈尔滨 150006)

摘　要　作者之一在[1,2]中就序列空间 Λ 而言，讨论了 Λ 关于强拓扑 $\beta(\Lambda,\Lambda^\times)$ 的可赋范化与可度量化问题，并给出了它的一些特征. 本文在更广泛的序列空间—矢值序列空间 $\Lambda[X]$ 上，讨论了 $\Lambda[X]$ 关于强拓扑 $\beta(\Lambda[X],\Lambda[X]^\times)$ 的可赋范化与可度量化问题，同时给出了它的一个特征.

关键词　矢值序列空间；强拓扑；可赋范化；可度量化.

设 Λ 是完备序列空间. X,Y 是复数域上的两个线性空间，并且 (X,Y) 组成一个对偶空间. 记 $\Lambda[X]=\{\bar{x}=(x_j)\in X^N$：对 $\forall\ y\in Y,(\langle x_j,y\rangle)_j\in\Lambda\}$. 定义 $\Lambda[X]$ 关于对偶空间 (X,Y) 的 Köthe 对偶为 Y 上的一个序列空间 $\Lambda[X]^\times$ 如下：

$$\Lambda[X]^\times=\{\bar{y}=(y_j)\in Y^N:\text{对}\ \forall\ \bar{x}\in\Lambda[X],\sum_{i\geqslant1}|\langle x_i,y_i\rangle|<\infty\}.$$

对 $\bar{x}\in\Lambda[X]^\times$ 及 $\bar{y}\in\Lambda[X]^\times$，定义 $\langle\bar{x},\bar{y}\rangle=\sum_{i\geqslant1}\langle x_i,y_i\rangle$，则 $(\Lambda[X],\Lambda[X]^\times)$ 关于双线性泛函 $\langle\bar{x},\bar{y}\rangle$ 构成一个对偶空间.

设序列空间 Λ 是(KB)空间，即 Λ 关于强拓扑 $\beta,(\Lambda,\Lambda^\times)$ 可赋范成 Banach 空间[2，§3]（其中 $\Lambda^\times$ 为 Λ 的 Köthe 对偶(3，§30]). 由[1]定理 1，存在 $\Lambda^\times$ 的有界集 N_0，它可以吸收 $\Lambda^\times$ 的任何有界集. 并且由[1]定理 1 中 2°⇒3°的证明，(KB)空间 Λ 中的范数定义如下：

$$\|t\|_\Lambda=\sup\{|\langle t,s\rangle|:s\in N_0\}=\sup\{|\sum_{i\geqslant1}t_is_i|:s=(s_j)\in N_0\},\ t=(t_j)\in\Lambda.$$

观察[1]定理 1 的证明，我们知道 N_0 是正规集. 进一步有

引理 1　对 $\forall\ i\geqslant1$，存在 $s=(s_j)\in N_0$，使得 $s_i\neq0$.

证明　若存在 i_0，使对 $\forall\ s=(s_j)\in N_0$，有 $s_{i_0}=0$. 则易知 N_0 不吸引 $\Lambda^\times$ 的有界集 $\{e_{i_0}\}$. 矛盾. 证毕.

引理 2　对 $\forall\ i\geqslant1$，存在 $s_i\neq0$，使得 $(0,\cdots,0,s_i,0,0,\cdots)\in N_0$.

证明　由 N_0 的正规性及引理 1 得证.

设 $(X,\beta(X,Y))$ 是 Banach 空间. 记 $X^*=(X,\beta(X,Y))^*$，则 $Y\subset X^*$，且对 $\forall\ x\in X$，

$$\|x\|_X=\sup\{|\langle x,y\rangle|:y\in Y,\|y\|_{X^*}\leqslant1\}.$$

称一个对偶空间 (X,Y) 是 Banach－Macky 对偶，如果 X 中所有 $\sigma(X,Y)$ 有界集是 $\beta(X,Y)$ 有界集(见[4,P. 195]).

命题 3　设 (X,Y) 是 Banach－Macky 对偶. 则对 $\forall\ \bar{x}=(x_j)\in\Lambda[X]$，

---

* 1991 年 9 月 27 日收到.

$$\sup\{\|(\langle x_j,y\rangle)_j\|_\Lambda : y\in Y,\|y\|_{X^*}\leqslant 1\}<\infty.$$

证明 设 $\bar{x}\in\Lambda[X]$. 于是对 $s=(s_j)\in\Lambda^\times$ 及 $y\in Y$,有 $\sum\limits_{i\geqslant 1}|s_i\langle x_i,y\rangle|<\infty$. 由[5],P. 165,定理 6.3 得,集合 $\{\sum\limits_{i\in\sigma}s_ix_i:\sigma\subset N$ 是有限集$\}$ 是 X 中 $\sigma(X,Y)$ 有界集,从而是 $\beta(X,Y)$ 有界集([4, P. 195]). 即 $\sup\{\|\sum\limits_{i\in\sigma}s_ix_i\|_X:\sigma\subset N$ 是有限集$\}<\infty$. 由此

$$\sup\{|\sum_{i\in\sigma}\langle s_ix_i,y\rangle|:\sigma\subset N\text{ 是有限集},y\in Y,\|y\|_{X^*}\leqslant 1\}<\infty.$$

又由[5],P. 145,推论 3.4 得 $\sup\{\sum\limits_{i\geqslant 1}|s_i\langle x_i,y\rangle|:y\in Y,\|y\|_{X^*}\leqslant 1\}<\infty$. 由 $s\in\Lambda^\times$ 的任意性立得,集合 $\{(\langle x_j,y\rangle)_j:y\in Y,\|y\|_{X^*}\leqslant 1\}$ 是 Λ 的有界集,从而是 $\beta(\Lambda,\Lambda^\times)$ 有界集([3,P. 413]). 引理得证. 证毕.

在命题 3 的条件下,对 $\bar{x}\in\Lambda[X]$,定义

$$\begin{aligned}\|\bar{x}\|_{\Lambda[X]}&=\sup\{\|(\langle x_j,y\rangle)_j\|_\Lambda:y\in Y,\|y\|_{X^*}\leqslant 1\}\\&=\sup\{|\sum_{i\geqslant 1}s_i\langle x_i,y\rangle|:y\in Y,\|y\|_{X^*}\leqslant 1,s=(s_j)\in N_0\}\\&=\sup\{\sum_{i\geqslant 1}|s_i\langle x_i,y\rangle|:y\in Y,\|y\|_{X^*}\leqslant 1,s\in N_0\}.\end{aligned}$$

易知,$\|\cdot\|_{\Lambda[X]}$)是 $\Lambda[X]$上的范数. 进一步,有

命题 4 $(\Lambda[X],\|\cdot\|_{\Lambda[X]}$是 Banach 空间.

证明 设$\{\bar{x}^{(n)}\}_1^\infty$是 $\Lambda[X]$中的 Cauchy 列. 对$\forall$ $i\geqslant 1$,由引理 2 知,存在 $s_i\neq 0$,使得

$$\|x_i^{(n)}\|_X\leqslant s_i\|\bar{x}^{(n)}\|_{\Lambda[X]}.$$

故$\{x_i^{(n)}\}_{n=1}^\infty$是 X 中 Cauchy 列,从而存在 $x_i\in X$,使

$$\lim_n x_i^{(n)}=x_i,\quad i=1,2,\cdots. \tag{1}$$

设 $y\in Y$, $\|y\|_{X^*}\leqslant 1$,则 $\|(\langle x_j^{(n)},y\rangle)_j\|_\Lambda\leqslant\|\bar{x}^{(n)}\|_{\Lambda[X]}$. 故$\{(\langle x_j^{(n)},y\rangle)_j\}_{n=1}^\infty$是 Λ 中 Cauchy 列,从而存在 $t(y)\in\Lambda$,使

$$\lim_n(\langle x_j^{(n)},y\rangle)_j=t(y). \tag{2}$$

由(1),(2)式易得,$t_i(y)=\langle x_i,y\rangle$,$i=1,2,\cdots$. 因此,$(\langle x_j,y\rangle)_j=t(y)\in\Lambda$,即证得 $\bar{x}=(x_j)\in\Lambda[X]$. 下证$\lim\bar{x}^{(n)}=\bar{x}$.

设 $\varepsilon>0$. 则存在 n_0,使当 $m,n>n_0$ 时, $\sum\limits_{i\geqslant 1}|s_i\langle x_i^{(m)}-x_i^{(n)},y\rangle|<\varepsilon$ 对 $s=(s_j)\in N_0$ 及 $y\in Y$, $\|y\|_{X^*}\leqslant 1$ 成立. 于是

$$\sum_{i=1}^k|s_i\langle x_i^{(m)}-x_i^{(n)},y\rangle|<\varepsilon \tag{3}$$

对 $s=(s_j)\in N_0$,$y\in Y$, $\|y\|_{X^*}\leqslant 1$ 及 $k\geqslant 1$ 成立. 由(1),(3)式得 $\sum\limits_{i=1}^k|s_i\langle x_i^{(m)}-x_i,y\rangle|\leqslant\varepsilon$, 对 $s\in N_0$,$y\in Y$, $\|y\|_{X^*}\leqslant 1$ 及 $k\geqslant 1$ 成立. 从而 $\sum\limits_{i\geqslant 1}|s_i\langle x_i^{(m)}-x_i,y\rangle|\leqslant\varepsilon$,对 $x\in N_0$,$y\in Y$, $\|y\|_{X^*}\leqslant 1$ 成立. 即 $\lim\limits_m\bar{x}^{(m)}=\bar{x}$. 命题得证. 证毕.

记 $\Lambda[X]^*=(\Lambda[X],\|\cdot\|_{\Lambda[X]})^*$. 则由[6,P. 160]知 $\Lambda[X]^\times\subset\Lambda[X]^*$.

引理 5 设 $y\in Y$，$\|y\|_{X^*}\leqslant 1$ 及 $s=(s_j)\in N_0$. 则 $(s_jy)\in\Lambda[X]^{\times}$，且 $\|(s_jy)\|_{\Lambda[X]^*}\leqslant 1$.

证明 $(s_jy)\in\Lambda[X]^{\times}$显然. 而

$$\begin{aligned}\|(s_jy)\|_{\Lambda[X]^*}&=\sup\{|\langle\bar{x},(s_jy)\rangle|:\bar{x}\in\Lambda[X],\|\bar{x}\|_{\Lambda[X]}\leqslant 1\}\\&=\sup\{|\langle(\langle x_j,y\rangle)_j,s\rangle|:\|\bar{x}\|_{\Lambda[X]}\leqslant 1\}\\&\leqslant\sup\{\|(\langle x_j,y\rangle)_j\|_{\Lambda}:\|\bar{x}\|_{\Lambda[X]}\leqslant 1\}\leqslant 1\end{aligned}$$

故引理得证.

引理 6 设 $\bar{x}\in\Lambda[X]$. 则 $\|\bar{x}\|_{\Lambda[X]}=\sup\{|\langle\bar{x},\bar{y}\rangle|:\bar{y}\in\Lambda[X]^{\times},\|\bar{y}\|_{\Lambda[X]^*}\leqslant 1\}$.

证明 记 $b=\sup\{|\langle\bar{x},\bar{y}\rangle|:\bar{y}\in\Lambda[X]^{\times},\|\bar{y}\|_{\Lambda[X]^*}\leqslant 1\}$. 则由引理 5 得

$$\begin{aligned}b&\geqslant\sup\{|\langle\bar{x},(s_jy)\rangle|:y\in Y,\|y\|_{X^*}\leqslant 1,s=(s_j)\in N_0\}\\&=\sup\{|\langle(\langle x_j,y\rangle)_j,s\rangle|:y\in Y,\|y\|_{X^*}\leqslant 1,s\in N_0\}\\&=\sup\{\|(\langle x_j,y\rangle)_j\|_{\Lambda}:y\in Y,\|y\|_{X^*}\leqslant 1\}\\&=\|\bar{x}\|_{\Lambda[X]}.\end{aligned}$$

又 $\|\bar{x}\|_{\Lambda[X]}=\sup\{|\langle\bar{x},F\rangle|:F\in\Lambda[X]^*,\|F\|_{\Lambda[X]^*}\leqslant 1\}\geqslant b$. 故引理得证.

定理 7 设对偶空间(X,Y)是 Banach－Macky 对偶，则下列问题等价：

1° Λ关于强拓扑$\beta(\Lambda,\Lambda^{\times})$及$X$关于强拓扑$\beta(X,Y)$均可赋范成 Banach 空间；

2° 矢值序列空间$\Lambda[X]$关于强拓扑$\beta(\Lambda[X],\Lambda[X]^{\times})$可赋范成 Banach 空间；

3° (a) $(X,\beta(X,Y))$是序列完备空间；及 (b) 存在$\Lambda[X]^{\times}$的一个$\sigma(\Lambda[X]^{\times},\Lambda[X])$有界集$B_0$，它可以吸收$\Lambda[X]^{\times}$中的任何$\sigma(\Lambda[X]^{\times},\Lambda[X])$有界集$B$，即有数$\alpha>0$，使得$B\subset\alpha B_0$.

证明 1°⇒2°. 由上面的讨论我们知道，在 1°的条件下，$\Lambda[X]$上存在一个范数$\|\cdot\|_{\Lambda[X]}$使$(\Lambda[X],\|\cdot\|_{\Lambda[X]})$成为 Banach 空间. 下面我们证明由范数$\|\cdot\|_{\Lambda[X]}$所确定的拓扑与强拓扑$\beta(\Lambda[X]),\Lambda[X]^{\times})$等价，即$\beta(\Lambda[X],\Lambda[X]^*)=\beta(\Lambda[X],\Lambda[X]^{\times})$. 又显然$\beta(\Lambda[X],\Lambda[X]^*)>\beta(\Lambda[X],\Lambda[X]^{\times})$. 因此只须证明$\beta(\Lambda[X],\Lambda[X]^*)<\beta(\Lambda[X],\Lambda[X]^{\times})$.

设$\Lambda[X]$中的网$\bar{x}^{\alpha}$满足$\beta(\Lambda[X],\Lambda[X]^{\times})-\lim\limits_{\alpha}\bar{x}^{\alpha}=0$. 记$B=\{\bar{y}\in\Lambda[X]^{\times}:\|\bar{y}\|_{\Lambda[X]^*}\leqslant 1\}$，则$B$是$\Lambda[X]^{\times}$中的$\sigma(\Lambda[X]^{\times},\Lambda[X])$有界集. 于是

$$\lim_{\alpha}\sup\{|\langle\bar{x}^{\alpha},\bar{y}\rangle|:\bar{y}\in B\}=0.$$

故由引理 6 得$\lim\limits_{\alpha}\|\bar{x}^{\alpha}\|_{\Lambda[X]}=0$. 由此证得$\beta(\Lambda[X],\Lambda[X]^*)<\beta(\Lambda[X],\Lambda[X]^{\times})$.

2°⇒3°. 若定义$\varphi:X\to\Lambda[X]$，$\varphi(x)=(x,0,0,\cdots)$. 则显然$\varphi$是从$(X,\beta(X,Y))$到$(\Lambda[X],\beta(\Lambda[X],\Lambda[X]^{\times}))$内的拓扑同构嵌入. 故由题设条件得(a). 下证(b).

由[4,P. 165]知，存在$\Lambda[X]^{\times}$中的$\sigma(\Lambda[X]^{\times},\Lambda[X])$有界集$B_0$，使$A_0=\{\bar{x}\in\Lambda[X]:\sup\limits_{\bar{y}\in B_0}|\langle\bar{x},\bar{y}\rangle|\leqslant 1\}$为$\Lambda[X]$的强拓扑的 0 点邻域基. 今证$B_0$可吸收$\Lambda[X]^{\times}$中的任何$\sigma(\Lambda[X]^{\times},\Lambda[X])$有界集$B$.

事实上，若记$A=\{\bar{x}\in\Lambda[X]:\sup\limits_{\bar{y}\in B}|\langle\bar{x},\bar{y}\rangle|\leqslant 1\}$，则$A$是$\Lambda[X]$的强拓扑的 0 点邻域，于是存在数$\alpha'>0$使$\alpha'A_0\subset A$. 由此得$B\subset\alpha B_0$，其中$\alpha=\dfrac{1}{\alpha'}$，即$B_0$吸收$B$，(b)成立.

3°⇒1°. 令$V_0=\{y\in Y:存在\ \bar{y}=(y_j)\in B_0\ 使\ y=y_1\}$. 则易证$V_0$是$Y$中$\sigma(Y,X)$有界集且吸收$Y$中的任何$\sigma(Y,X)$有界集. 由此证得$X$关于强拓扑$\beta(X,Y)$可赋范成 Banach 空间.

取$x_0\in X$，$x_0\neq 0$. 令$N_0=\{(\langle x_0,y_j\rangle)_j:\bar{y}=(y_i)\in B_0\}$. 于是对$\forall\ t=(t_j)\in\Lambda$，有

$$\sup\{|\langle t,(\langle x_0,y_j\rangle)_j\rangle|:\bar{y}=(y_j)\in B_0\}=\sup\{|\langle(t_jx_0),\bar{y}\rangle|:\bar{y}\in B_0\}.$$

这样，N_0是$\Lambda^\times$中的有界集. 下证N_0吸收$\Lambda^\times$中的任何有界集N.

取$y_0\in Y$，使$\langle x_0,y_0\rangle=1$. 记$B=\{(s_jy_0):s=(s_j)\in N\}$. 则$B$是$\Lambda[X]^\times$中的$\sigma(\Lambda[X]^\times,\Lambda[X])$有界集. 于是存在数$a>0$，使$B\subset aB_0$. 由此$N\subset aN_0$. 故由[1]定理1立得$\Lambda$关于强拓扑$\beta(\Lambda,\Lambda^\times)$可赋范成Banach空间. 定理得证.

类似于定理7，并参见[2]定理6，我们有

定理8 设对偶空间(X,Y)是Banach—Macky对偶. 则下列问题等价：

1° Λ关于强拓扑$\beta(\Lambda,\Lambda^\times)$及$X$关于强拓扑$\beta(X,Y)$均可度量化成Frechet空间；

2° 矢值序列空间$\Lambda[X]$关于强拓扑$\beta(\Lambda[X],\Lambda[X]^\times)$可度量化成Frechet空间

3° (a) $(X,\beta(X,Y))$是序列完备空间；及

(b) 存在$\Lambda[X]^\times$中的可列多个$\sigma(\Lambda[X]^\times,\Lambda[X])$有界集$\{B_n\}_1^\infty$，它可以吸收$\Lambda[X]^\times$中的任何$\sigma(\Lambda[X]^\times,\Lambda[X])$有界集$B$，即有$B_{n_0}$及$a>0$使得$B\subset aB_{n_0}$.

参 考 文 献

[1] 吴从炘，完备矩阵代数Ⅰ，数学学报，21(1978)，No. 2，161—170.

[2] 吴从炘，赵林生，叙列空间上的二级囿变函数(Ⅱ)，数学研究与评论，4(1984)，No. 1，97—106.

[3] G. Köthe, *Topological Vector Spaces* Ⅰ, Springer—Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1983.

[4] 夏道行、杨亚立，线性拓扑空间引论，上海科技出版社，上海，1986.

[5] P. K. Kamthan and M. Gupta, *Sequence Spaces and Series*, Lecture Notes 65, New York, 1981.

[6] M. Gupta, P. K. Kamthan and J. Patterson, *Duals of generalized sequence spaces*, J. Math. Anal. Appl., 82 (1981), 152—168.

Normedness and Metrizability of Strong Topology

Wu Congxin　　*Bu Qingying*

(Dept. of Math., Harbin Institute of Technology)

Abstract

One of the authors[1,2] discussed the normedness and metrizability of sequence space Λ with respect to the strong topology $\beta(\Lambda,\Lambda^*)$. In this paper, we discuss the normedness and metrizability of vector-valued sequence space $\Lambda[X]$ with respect to the strong topology $\beta(\Lambda[X],\Lambda[X]^*)$.