第14卷第2期　　　数 学 研 究 与 评 论　　　Vol. 14 No. 2
1994年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1994

Hardy—Riesz 拓广了的 Hilbert 不等式的一个改进*

高 明 哲

(湖南湘西民族教育学院数学科，吉首 416000)

摘　要　本文利用 Euler—Maclaurin 求和公式以及 Steffensen 不等式改进了文[1]的结果.

关键词　Steffensen 不等式，Euler—Maclaurin 求和公式，单调函数，Hilbert 不等式.

本文是要证明下列定理.

定理　设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是任意两个非负实数序列，它们满足条件$0<\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p<+\infty$，$0<\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q<+\infty$. 其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$p>1$. 那么

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}<\{\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(q)a_n^p\}^{\frac{1}{p}}\{\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(p)b_n^q\}^{\frac{1}{q}},\tag{1}$$

其中 $\omega_n(x)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}-\frac{n^{\frac{1}{x}}}{n(x-1)}$，$x=p,q$.

这条定理主要是将文[1]中的$\frac{n^{\frac{1}{x}}}{(n+1)(x-1)}$改进为$\frac{n^{\frac{1}{x}}}{n(x-1)}$.

为了证明这条定理. 我们先证以下几条引理.

引理 1　设 $p>1$，则对任何正整数 n，下列不等式成立：

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{1}{1+t}\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{p}}dt\geqslant\frac{p(2p-1)n^{\frac{1}{p}}}{(p-1)[n(2p-1)+(p-1)]}.\tag{2}$$

证明　记 $I_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{1}{1+t}\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{p}}dt$. 利用分部积分法得

$$I_n=\frac{pn^{\frac{1}{p}}}{(p-1)(n+1)}+\frac{p}{p-1}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{t^{1-\frac{1}{p}}}{(1+t)^2}dt.\tag{3}$$

令 $f(t)=\frac{1}{(1+t)^2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}}$，$g(t)=(nt)^{1-\frac{1}{p}}$. 则 $f(t)$非负且在区间$[0,\frac{1}{n}]$上单调递减，当 $t\in[0,\frac{1}{n}]$时，$0\leqslant g(t)\leqslant 1$. 由 Steffensen 不等式[2]得

$$\int_0^{\frac{1}{n}}f(t)g(t)dt=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{t^{1-\frac{1}{p}}}{(1+t)^2}dt\geqslant\int_{\frac{1}{n}-c}^{\frac{1}{n}}f(t)dt,$$

* 1991年9月21日收到.

其中 $c=\int_0^{\frac{1}{n}} g(t)dt=\int_0^{\frac{1}{n}}(nt)^{1-\frac{1}{p}}dt=\frac{p}{n(2p-1)}$. 于是

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{t^{1-\frac{1}{p}}}{(1+t)^2}dt\geqslant\int_{\frac{1}{n}-c}^{\frac{1}{n}}\frac{1}{(1+t)^2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}}dt=-\frac{n^{\frac{1}{p}}}{n+1}+\frac{n^{\frac{1}{p}}(2p-1)}{n(2p-1)+(p-1)}.$$

将它代入(3)并化简得

$$I_n\geqslant\frac{p(2p-1)n^{\frac{1}{p}}}{(p-1)[n(2p-1)+(p-1)]}. \tag{4}$$

引理 2 设 $h(p)=\frac{1}{p^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln k}{1+k}\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}}$. 则对任何实数 $p>1$,都有 $h(p)<1$.

证明 $h(p)=\frac{1}{p^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln k}{1+k}\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{1}{p^2}\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{1+x}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{p}}dx=\frac{1}{p^2}\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{1+x}e^{-\frac{1}{p}\ln x}dx$,令 $t=\ln x$. 则

$$h(p)<\frac{1}{p^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{te^{-\frac{1}{p}t}}{1+e^t}\right)e^t dt=\frac{1}{p^2}\int_0^{\infty}\frac{te^{-\frac{1}{p}t}}{1+e^{-t}}dt<\frac{1}{p^2}\int_0^{\infty}te^{-\frac{1}{p}t}dt=1.$$

考虑 $\sigma_n(p)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n+m}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{p}}$. .利用 Euler—Maclaurin 求和公式得

$$\sigma_n(p)=\int_{\frac{1}{n}}^{\infty}\frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{p}}dx+\frac{1}{2n}f\left(\frac{1}{n}\right)-\sum_{r=1}^{s-1}\frac{B_{2r}}{(2r)!}\left(\frac{1}{n}\right)^{2r}f^{(2r-1)}\left(\frac{1}{n}\right)+\rho_m, \tag{5}$$

其中 $f(x)=\frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{p}}$, $B_2=\frac{1}{6}$, $B_4=-\frac{1}{30}$, $B_6=\frac{1}{42}$, $B_8=-\frac{1}{30}$等是 Bernoulli 数. 由于 ρ_m 与 $\sum_{r=1}^{s-1}$ 中末一项同号且绝对值较小,经计算知 $f'''\left(\frac{1}{n}\right)<0$. 由(5)得

$$\begin{aligned}\sigma_n(p)&<\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{p}}dx-\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{p}}dx+\frac{1}{2n}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{12n^2}f'\left(\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}-I_n+\frac{n^{\frac{1}{p}}}{2(n+1)}+\frac{n^{\frac{1}{p}}}{12(n+1)^2}+\frac{n^{\frac{1}{p}}}{12p(n+1)}.\end{aligned}$$

令 $S_n(p)=I_n-\frac{n^{\frac{1}{p}}}{2(n+1)}-\frac{n^{\frac{1}{p}}}{12(n+1)^2}-\frac{n^{\frac{1}{p}}}{12p(n+1)}$,则

$$\sigma_n(p)<\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}-S_n(p). \tag{6}$$

引理 3 当 $n\geqslant2$ 时, $S_n(p)>\frac{n^{\frac{1}{p}}}{n(p-1)}$.

证明 $S_n(p)-\frac{n^{\frac{1}{p}}}{n(p-1)}=\left\{I_n-\frac{n^{\frac{1}{p}}}{n(p-1)}\right\}-\frac{n^{\frac{1}{p}}}{2(n+1)}-\frac{n^{\frac{1}{p}}}{12(n+1)^2}-\frac{n^{\frac{1}{p}}}{12p(n+1)}$. 由引理 1 可得

$$\begin{aligned}S_n(p)-\frac{n^{\frac{1}{p}}}{n(p-1)}&\geqslant n^{\frac{1}{p}}\left\{\frac{n(2p-1)-1}{n[n(2p-1)+(p-1)]}\right\}-\frac{n^{\frac{1}{p}}}{2(n+1)}\\&\quad-\frac{n^{\frac{1}{p}}}{12(n+1)^2}-\frac{n^{\frac{1}{p}}}{12p(n+1)}\end{aligned}$$

记

$$\varphi_n(p)=\frac{n(2p-1)-1}{n[n(2p-1)+(p-1)]}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{12(n+1)^2}-\frac{1}{12p(n+1)}. \tag{7}$$

于是

$$S_n(p)-\frac{n^{\frac{1}{p}}}{n(p-1)}\geqslant n^{\frac{1}{p}}\varphi_n(p). \tag{8}$$

对 $\varphi_n(p)$关于 p 求导得 $\varphi_n'(p)=\dfrac{n+1}{n[n(2p-1)+(p-1)]^2}+\dfrac{1}{12p^2(n+1)}>0$. 故对任何自然数 n,$\varphi_n(p)$严格递增.

定义 $\varphi_n(1)=\lim\limits_{p\to1^+}\varphi_n(p)=\dfrac{n-1}{n^2}-\dfrac{1}{2(n+1)}-\dfrac{1}{12(n+1)^2}-\dfrac{1}{12(n+1)}=\dfrac{5n^3+4n^2-12n-12}{12n^2(n+1)^2}$. 可见当 $n\geqslant2$ 时,$\varphi_n(1)>0$. 由于 $\varphi_n(p)>\varphi_n(1)$. 因此 $\varphi_n(p)>0$. 由(8)可得 $S_n(p)-\dfrac{n^{\frac{1}{p}}}{n(p-1)}>0$. 从而引理 3 成立.

因此,当 $n\geqslant2$ 时,由引理 3 及(6)可得下列重要不等式:

$$\sigma_n(p)<\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}-\frac{n^{\frac{1}{p}}}{n(p-1)}.\ (n\geqslant2,n\in N), \tag{9}$$

引理 4 设 $\sigma_1(p)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+k}(\dfrac{1}{k})^{\frac{1}{p}}$,其中 $p>1$. 则 $\sigma_1(p)<\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}-\dfrac{1}{p-1}$.

证明 分以下两种情形来讨论.

Ⅰ) $p\geqslant\dfrac{3}{2}$. 由(8)可得 $S_1(p)-\dfrac{1}{p-1}\geqslant\varphi_1(p)$. 又由(7)知

$$\varphi_1(p)=\frac{2p-2}{3p-2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{48}-\frac{1}{24p}=\frac{57p^2-76p+4}{48p(3p-2)}.$$

当 $p\geqslant\dfrac{3}{2}$时,$\varphi_1(p)>0$,因此 $S_1(p)-\dfrac{1}{p-1}\geqslant\varphi_1(p)>0$. 即 $S_1(p)>\dfrac{1}{p-1}$. 于是由(6)可得

$$\sigma_1(p)<\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}-S_1(p)<\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}-\frac{1}{p-1}.$$

Ⅱ) $1<p<\dfrac{3}{2}$. 设 $F(p)=\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}-\dfrac{1}{p-1}-\sigma_1(p)$. 考虑$\dfrac{1}{\sin x}$的展开式:

$$\frac{\pi}{\sin x}=\pi\{\frac{1}{x}+\frac{1}{6}x+\frac{7}{360}x^3+\frac{31}{15120}x^5+\cdots\}$$

其中大括号内未写出的各项都大于零且逐步减小(这里假定 x 大于零).

注意到 $\sin\dfrac{\pi}{p}=\sin(\pi-\dfrac{\pi}{p})$. 用 $\pi-\dfrac{\pi}{p}$代替上述展开式中的 x 得到

$$\begin{aligned}F(p)&=\frac{\pi}{\sin(\pi-\frac{\pi}{p})}-\frac{1}{p-1}-\sigma_1(p)\\&=\{\frac{p}{p-1}+\frac{\pi^2}{6}(1-\frac{1}{p})+\frac{7\pi^4}{360}(1-\frac{1}{p})^3+\cdots\}-\frac{1}{p-1}-\sigma_1(p)\end{aligned}$$

$$=\{1+\frac{\pi^2}{6}(1-\frac{1}{p})+\frac{7\pi^4}{360}(1-\frac{1}{p})^3+\cdots\}-\sigma_1(p).$$

令 $f_1(p)=1+\frac{\pi^2}{6}(1-\frac{1}{p})+\frac{7\pi^4}{360}(1-\frac{1}{p})^3$. 由于 $1-\frac{1}{p}>0$. 因此

$$F(p)>f_1(p)-\sigma_1(p). \tag{10}$$

下面只需证明 $f_1(p)>\sigma_1(p)$. 在区间 $[1,\frac{3}{2}]$ 上来研究 $f_1(p)$ 与 $\sigma_1(p)$. 对 $f_1(p)$ 关于 p 求导得

$$f_1'(p)=\frac{\pi^2}{6p^2}+\frac{7\pi^4(p-1)^2}{120p^4}.$$

容易验证 $f_1(p)$ 在 $[1,\frac{3}{2}]$ 上严格递减，于是可以求得 $f_1(p)$ 在 $[1,\frac{3}{2}]$ 上的极小值：

$$f_1(\frac{3}{2})=\frac{\pi^2}{6}(\frac{2}{3})^2+\frac{7\pi^4}{120}(\frac{1}{2})^2(\frac{2}{3})^4>1.$$

因此当 $p\in[1,\frac{3}{2}]$ 时，

$$f_1(p)>1. \tag{11}$$

对 $\sigma_1(p)$ 关于 p 求导，由引理 2 知

$$\sigma_1'(p)=h(p)<1. \tag{12}$$

可见 $f_1(p)$ 与 $\sigma_1(p)$ 都是 $[1,\frac{3}{2}]$ 上的单调函数，且满足下列条件：

1) 它们在 $[1,\frac{3}{2}]$ 上可导.

2) 在开区间 $(1,\frac{3}{2})$ 内由 (11) 与 (12) 知 $f_1(p)>\sigma_1'(p)$.

3) $f_1(1)=1$. $\sigma_1(1)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k}(\frac{1}{k})=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=1$. 即有 $f_1(1)=\sigma_1(1)$.

因此在 $(1,\frac{3}{2})$ 内下列不等式成立[3] $f_1(p)>\sigma_1(p)$. 于是由 (10) 可得 $F(p)>f_1(p)-\sigma_1(p)>0$. 即 $\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}-\frac{1}{p-1}-\sigma_1(p)>0$. 因此 $\sigma_1(p)<\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}-\frac{1}{p-1}$.

综合 I) 与 II) 即得引理 4 的结果.

定理的证明. 利用条件 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$. 由 Hölder 不等式知

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n}&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m}{(m+n)^{1/p}}(\frac{m}{n})^{\frac{1}{pq}}\cdot\frac{b_n}{(m+n)^{1/q}}(\frac{n}{m})^{\frac{1}{pq}}\\&\leqslant\{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m^p}{m+n}(\frac{m}{n})^{\frac{1}{q}}\}^{\frac{1}{p}}\{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^q}{m+n}(\frac{m}{n})^{\frac{1}{p}}\}^{\frac{1}{q}}\\&=\{\sum_{n=1}^{\infty}[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}(\frac{n}{m})^{\frac{1}{q}}]a_n^p\}^{\frac{1}{p}}\{\sum_{n=1}^{\infty}[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}(\frac{n}{m})^{\frac{1}{p}}]b_n^q\}^{\frac{1}{q}}\\&=\{\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n(q)a_n^p\}^{\frac{1}{p}}\{\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n(p)b_n^q\}^{\frac{1}{q}},\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $\sigma_n(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m+n}(\frac{n}{m})^{\frac{1}{x}}$, $x=p,q$.

由 (9) 及引理 4 知，对一切自然数 n 都有

$$\sigma_n(p) < \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} - \frac{n^{\frac{1}{p}}}{n(p-1)}. \tag{14}$$

同理可得

$$\sigma_n(q) < \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{q}} - \frac{n^{\frac{1}{q}}}{n(q-1)}. \tag{15}$$

令

$$\omega_n(x) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{x}} - \frac{n^{\frac{1}{x}}}{n(x-1)},\ x = p,q. \tag{16}$$

由(13),(14),(15)和(16)即知(1)成立.

参 考 文 献

[1] 徐利治、郭永康，关于 Hilbert 不等式的 Hardy—Riesz 拓广的注记，数学季刊，6:1(1991)，75—77.

[2] Cao Yuan, *The Correction of Extension of Steffensens inequality*, Joural of Mathematical and Expositon Vol. 11, No. 1, Feb. 1991, P. 151—153.

[3] 刘玉琏，傅沛仁编，数学分析讲义(上册)，人民教育出版社，1981. P. 242.

[4] 张南岳，Euler—Maclaurin 公式与渐近估计，数学的实践与认识，1(1985)，P. 30—38.

An Improvement of Hardy-Riesz's Extension of the Hilbert Inequality

Gao Mingzhe

(Section of Math., National Education College of Xiangxi, Hunan)

Abstract

In this paper, using Steffensen's integral inequality and the summation formula of Euler-Mac-laurin, we prove that the following inequality is valid:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n+m}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\pi}{\sin \pi/p} - \frac{n^{\frac{1}{p}}}{n(p-1)},$$

where $p > 1$ is a real number, and n is an arbitrary positive integer. Using this result, we give a refinement on the result given recently by L.C. Hsu and Guo Yongkang[1].