第14卷第2期 数学研究与评论 Vol. 14 No. 2
1994年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1994

非交换除环上的二次方程*

张盛祝　　穆大禄
（信阳师范学院数学系，信阳 464000）

摘　要　本文讨论了非交换除环 D 上的特殊二次方程 $(x-\beta)(x-\alpha)=0$ 的右零点分布问题，并且由此而得到了一种求解四元数环 $R(i,j,k)$ 上的二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的新方法.

关键词　二次方程；右零点；共轭.

§1　前　言

设 D 为非交换除环，考虑 D 上的具如下形式的多项式

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0,\ (a_i\in D,0\leqslant i\leqslant n).$$

规定变元 x 与系数可交换，加法按通常方式、乘法按满足分配律展开进行，那么上述所有多项式的集合形成一个环，我们称为 D 上的多项式环，记为 $D[x]$，由于 $D[x]$ 中存在一右边除算法，因此 $D[x]$ 是一左 Euclid 环.

设 $a\in D,f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in D[x]$，我们定义右边代入为 $f(a)=\sum_{i=0}^{n}a_ia^i$，若 $f(a)=0$，则称 a 为 $f(x)$ 的右零点. 对于 $f(x),g(x)\in D[x]$，若存在 $h(x)\in D[x]$ 使得 $f(x)=h(x)g(x)$，则称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的一个右因子，即 $g(x)$ 右整除 $f(x)$，记为 $g(x)\mid f(x)$. 由[1,3]，我们有 $f(a)=0$ 当且仅当 $(x-a)\mid f(x)$.

设 $\alpha,\beta\in D$，若存在 $t\in D^*=D\backslash\{0\}$ 使得 $\beta=t\alpha t^{-1}$，则称 α 与 β 共轭，并记 $C_\alpha=\{t\alpha t^{-1}\mid t\in D^*\}$ 为 α 所在的共轭类. 对于 $S\subset D$，我们定义 D 中 S 的中心化子为 $Z(S)=\{y\in D\mid yx=xy,\forall\ x\in S\}$，且记号 $Z(D)=Z$ 表示 D 的中心. 假定 $\alpha\in D$ 是 Z 上的代数元，那么存在一个首项系数为 1 的满足 $m(\alpha)=0$ 且具有最小次数的多项式 $m(x)\in Z[x]$，我们称此 $m(x)$ 为 α 在中心 Z 上的最小多项式，记为 $m_\alpha(x)=m(x)$.

设 R 为域，若 $-1\in R$ 不能表示成 R 中的一些元素的平方和，则称 R 为形式实域. 若形式实域 R 的代数形式实扩域只有 R 自身，则称 R 为实封闭域. 设 R 为实封闭域，我们称 $R(i,j,k)=\{a+bi+cj+dk\mid a,b,c,d\in R,i^2=j^2=k^2=-1,k=ij=-ji,j=ki=-ik,i=jk=-kj\}$ 为实封闭域 R 上的四元数除环.

考虑 $D[x]$ 中的二次多项式，我们在 §3 中研究了特殊二次方程

$$(x-\beta)(x-\alpha)=0 \tag{1}$$

的右零点分布问题，利用 §3 中的结果在 §4 中讨论了 $D=R(i,j,k)$ 上的二次方程

* 1991年10月3日收到，1993年7月16日收到修改稿.

$$x^2 + ax + b = 0 \tag{2}$$

的右零点求解问题，关于这个问题以前 Niven[7]已经讨论过，但其方法比较初等，而且对有些问题只能判定其右零点的分布情形，并不能求出解来，我们这里引入的一种新方法较之 Niven[7]要好得多.

§2 预备引理

引理 2.1 设 $a\in D, f(x), g(x)\in D[x]$，若 $t=g(a)\neq 0$，则 $(fg)(a)=0$ 当且仅当 $f(tat^{-1})=0$.

证明 设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$，则 $f(x)g(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ig(x)x^i$，因此 $(fg)(a)=\sum_{i=0}^{n}a_ita^i=[\sum_{i=0}^{n}a_i(tat^{-1})^i]t=f(tat^{-1})\cdot t$，引理 2.1 得证.

引理 2.2[5] 设 $a\in D$ 为 Z 上的代数元，且其最小多项式为 $m_a(x)$，若存在 $\beta\in D$ 使得 $m_a(\beta)=0$，则 a 与 β 共轭.

我们定义 $(x-\beta)(X-a)\in D[x]$ 可交换，如果存在 $\alpha',\beta'\in D$ 使得 $(x-\beta)(x-a)=(x-\alpha')(x-\beta')$，其中 $\beta'\neq a$.

设 $a,\beta,\gamma\in D$，考查具有一般形式的一次方程式

$$ax - x\beta = \gamma, \tag{3}$$

其中假定变元 x 与系数不能交换，除非系数在中心 Z 上. 若存在 $u\in D$ 使得 $au-u\beta=\gamma$，则称 u 为一次方程式(3)的零点.

引理 2.3 $(x-\beta)(x-a)\in D[x]$ 可交换当且仅当具一般形式的一次方程式 $ax-x\beta=1$ 有零点 $u\in D$. 此时 $(x-\beta)(x-a)=(x-u^{-1}au)(x-u\beta u^{-1})$，其中 $a\neq u\beta u^{-1}$.

证明 设 $f(x)=(x-\beta)(x-a)$ 可交换，则存在 $\beta'\in D, \beta'\neq a$ 使得 $f(\beta')=0$，由引理 2.1 即得存在 $u_0=\beta'-a\in D^*$ 使得 $u_0\beta'u_0^{-1}-\beta=0$，取 $u_1=u_0^{-1}$，则 $\beta'=u_1\beta u_1^{-1}$. 又 $f(x)=x^2-(a+\beta)x+\beta a$，因此 $u_1\beta^2u_1^{-1}-(a+\beta)u_1\beta u_1^{-1}+\beta a=0$，即有 $\beta(au_1-u_1\beta)=(au_1-u_1\beta)\beta$. 令 $z=au_1-u_1\beta$. 则 $z\in Z(\beta)$，且 $z\neq 0$，那么 $au_1\cdot z^{-1}-u_1\beta\cdot z^{-1}=1$，即 $a(u_1z^{-1})-(u_1z^{-1})\beta=1$. 所以一次方程式 $ax-x\beta=1$ 有零点 $u=u_1z^{-1}\in D$.

现设一次方程式 $ax-x\beta=1$ 有一零点 $u\in D$，那么必有 $(x-\beta)(x-a)=(x-u^{-1}au)(x-u\beta u^{-1})$，其中 $u\beta u^{-1}\neq a$. 其实由关系 $au-u\beta=1$ 立即得到 $u^{-1}au+u\beta u^{-1}=a+\beta, u^{-1}au\cdot u\beta u^{-1}=\beta a$，亦有 $a\neq u\beta u^{-1}$. 所以 $(x-\beta)(x-a)$ 可交换. 引理得证.

对于 D 上的具一般形式的一次方程式(3)，有下述结论

引理 2.4[2,5] 设 $a,\beta\in D$ 是中心 Z 上的两代数元，那么

i) 若 $m_a(x)\neq m_\beta(x)$，则(3)有唯一零点.

ii) 若 $m_a(x)=m_\beta(x)=f(x)$，则 $ax-x\beta=1$ 存在零点 $u\in D$ 当且仅当 $(x-\beta)(x-a)\mid f(x)$.

引理 2.5[3] 设 D 为非交换除环，$a\in D$，那么中心化子 $Z(a)$ 是一无限集，即 $|Z(a)|=\infty$.

设 $f(x), g(x)\in D[x]$，称 f 与 g 右相似如果作为右 $D[x]-$模，$D[x]/fD[x]\cong D[x]/gD[x]$. 对偶地可以定义左相似. 若 f 与 g 既左相似又右相似，则称 f 与 g 相似.

下述结论中记号 Σ_m 表示集$\{1,2,\cdots,m\}$上的置换群.

引理 2.6[4] 设 $0\neq f(x)\in D[x]\backslash D$,那么

i) $f(x)$的既约分解必存在.

ii) 若 $f(x)$有如下两既约分解式

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_k(x)$$

则 $m=k$,且存在一置换 $\pi\in\Sigma_m$ 使得 p_i 相似于 $q_{\pi(i)}$,进而 $\deg p_i=\deg q_{\pi(i)}$.

引理 2.7[8] 设 $0\neq f(x)\in D[x]$,$\beta\in D$ 是 $f(x)$的一右零点,那么 $f(x)$必然存在既约分解 $f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x)$使得 β 与其中某个一次因子 $p_i(x)$的右零点相共轭.

§3 关于方程$(x-\beta)(x-\alpha)=0$

对于非交换除环 D 上的特殊二次方程(1),我们有下述定理(其中记号$\nmid$表示不能右整除).

定理 3.1 设 α、$\beta\in D$ 为 Z 上的两代数元,那么下述结论成立

i) 若 $m_\alpha(x)\neq m_\beta(x)$,则(1)在 D 内恰有两彼此不共轭的右零点;

ii) 若 $m_\alpha(x)=m_\beta(x)$,且$(x-\beta)(x-\alpha)\mid m_\alpha(x)$,则(1)在 D 内有无限多个彼此共轭的右零点;

iii) 若 $m_\alpha(x)=m_\beta(x)$,但$(x-\beta)(x-\alpha)\nmid m_\alpha(x)$,则(1)在 D 内只有一个右零点.

证明 由引理 2.3,则二次多项式$(x-\beta)(x-\alpha)$的右一次因子由$(x-\alpha)$及形如$(x-u\beta u^{-1})$的因式所组成,其中 $u\in D^*$ 为一次方程式 $\alpha x-x\beta=1$ 的零点.

i) 若 $m_\alpha(x)\neq m_\beta(x)$,由引理 2.4 i)则一次方程式 $\alpha x-x\beta=1$ 只有一个零点 $u_0\in D^*$,由此也有 $\alpha\neq u_0\beta u_0^{-1}$,那么$(x-\beta)(x-\alpha)$的右一次因子只有两个即$(x-\alpha)$与$(x-u_0\beta u_0^{-1})$,从而结论 i)成立.

ii) 若 $m_\alpha(x)=m_\beta(x)$,且$(x-\beta)(x-\alpha)\mid m_\alpha(x)$,由引理 2.4 ii),则一次方程式 $\alpha x-x\beta=1$ 在 D^* 内存在零点.

设 $u_0\in D^*$ 为 $\alpha x-x\beta=1$ 的一特殊零点,那么 $\alpha x-x\beta=1$ 的零点集 $E=\{u=u_0+u_1\mid \alpha u_1=u_1\beta, u_1\in D\}$. 由于 $m_\alpha(x)=m_\beta(x)$,由引理 2.2 则存在 $t\in D^*$ 使得 $\beta=t\alpha t^{-1}$,那么 $\alpha u_1=u_1\beta$ 当且仅当 $tu_1\in Z(\beta)$. 利用引理 2.5,则 $E=\{u=u_0+u_1\mid tu_1\in Z(\beta)\}$是一无限集.

现设 $u_1,u_2\in D$,$u_1\neq u_2$,但$(u_0+u_1)\beta(u_0+u_1)^{-1}=(u_0+u_2)\beta(u_0+u_2)^{-1}$,其中 $\alpha u_1=u_1\beta$,$\alpha u_2=u_2\beta$. 那么$(u_0+u_2)^{-1}(u_0+u_1)\in Z(\beta)$,即存在 $z_0\in Z(\beta)$使得 $u_0+u_1=u_0z_0+u_2z_0$,但 $z_0\neq 1$,因此 $u_0=(u_2z_0-u_1)(1-z_0)^{-1}$. 于是 $u_0\beta=(u_2z_0-u_1)(1-z_0)^{-1}\beta=(u_2z_0\beta-u_1\beta)(1-z_0)^{-1}=(\alpha u_2z_0-\alpha u_1)(1-z_0)^{-1}=\alpha u_0$,矛盾.

综合上述分析即知结论 ii)成立.

iii) 若 $m_\alpha(x)=m_\beta(x)$,但$(x-\beta)(x-\alpha)\nmid m_\alpha(x)$,由引理 2.4 ii),则一次方程式 $\alpha x-x\beta=1$ 在 D^* 内无零点,由此即知结论 iii)成立.

§4 关于方程 $x^2+ax+b=0$

设 R 为实封闭域，取 $D=R(i,j,k)$，对于 $a=a_0+a_1i+a_2j+a_3k\in D$，我们称 $\bar{a}=a_0-a_1i-a_2j-a_3k$ 为 a 在 D 中的复共轭.

下面我们建立 $D=R(i,j,k)$ 上的二次方程(2)的右零点分布定理.

定理 4.1 设 R 为实封闭域，$D=R(i,j,k)$，$x^2+ax+b\in D[x]$，那么存在 $\alpha,\beta\in D$ 使得 $x^2+ax+b=(x-\beta)(x-\alpha)$，并且

i) 若 $m_\alpha(x)\neq m_\beta(x)$，则方程(2)在 D 内恰有两彼此不共轭的右零点；

ii) 若 $m_\alpha(x)=m_\beta(x)=x^2+ax+b$，则方程(2)在 D 内有无限多个彼此共轭的右零点；

iii) 若 $m_\alpha(x)=m_\beta(x)\neq x^2+ax+b$，则方程(2)在 D 内只有一个右零点.

证明 由定理 3.1，我们只需证明存在 $\alpha,\beta\in D$，使得 $x^2+ax+b=(x-\beta)(x-\alpha)$ 即可.

设 $f(x)=x^2+ax+b$，记 $\bar{f}(x)=x^2+\bar{a}x+\bar{b}$，令 $g(x)=\bar{f}(x)f(x)$，那么 $g(x)\in R[x]$. 由代数基本定理，则存在 $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\}\subset R(i)$ 使得

$$g(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)(x-\lambda_4). \tag{4}$$

分解式(4)是 $g(x)$ 在 $R(i)[x]$ 中一既约分解，因而也可看作是 $g(x)$ 在 $D[x]$ 中的一既约分解. 由于 $g(x)=\bar{f}(x)f(x)$，由引理 2.6 则 $f(x)$ 不是 $D[x]$ 中的既约多项式，因此存在 $\alpha,\beta\in D$ 使得 $x^2+ax+b=(x-\beta)(x-\alpha)$，从而定理得证.

注记 上述证明中只是论证了方程(2)的右零点 α 确实存在，但是怎么求出这个 α 来还是一个问题. 这里我们引入一种解决问题的具体办法.

考查分解式(4)，若存在 $u_0\in\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\}$ 使得 $f(u_0)=0$，取 $\alpha=u_0$，问题解决. 否则，由引理 2.7 则可设 $\alpha=tu_0t^{-1}$，其中 u_0 取自于 $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\}$ 中的某一元，$t\in D^*$ 待定，那么

$$tu_0^2+atu_0+bt=0. \tag{5}$$

将(5)化为 R 上的四元齐次线性方程组，由此而定出一特殊的 t_0，取 $\alpha=t_0u_0t_0^{-1}$ 即为所求.

例 求方程 $x^2+ix+j=0$ 在 $D=R(i,j,k)$ 中的一个右零点.

解 设 $f(x)=x^2+ix+j$，令 $g(x)=\bar{f}(x)f(x)$，则

$$g(x)=\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right).$$

经选择可设 $\alpha=t((1-\sqrt{3}i)/2)t^{-1}$ 为 $f(x)$ 的一个右零点，其中 $t\in D^*$ 待定. 那么

$$t(1-\sqrt{3}i)+2it+jt(1+\sqrt{3}i)=0.$$

令 $t=t_1+t_2i+t_3j+t_4k$，则有 R 上的四元齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}-2 & -1 & -\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3}-2 \\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3}+2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

取 $t_3=0,t_4=1$，由此则可定出一特殊的值 $t=[(\sqrt{3}+1)/2]-[(\sqrt{3}+1)/2]i+k$，那么 $\alpha=t((1-\sqrt{3}i)/2)t^{-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$ 即为所求.

感谢湖南大学杨必中副教授的指导.

参 考 文 献

[1] U. Bray and G. Whaples, *Polynomials with coefficients from a division ring*, Canad. J. Math., 35(1983), 509—515.

[2] P. M. Cohn, *The range of derivations on a skew field and the equation $ax - xb = c$*, J. Indian Math. Soc., 37 (1973), 61—69.

[3] B. Gordon and T. S. Motzkin, *On the zeros of polynomials over division rings*, Trans. Amer. Math. Soc., 116 (1965), 218—226.

[4] N. Jacobson, *The theory of rings*, 5th edition, Math. Survey Series No. 2(1978).

[5] R. E. Johnson, *On the equation $x\alpha = \gamma x + \beta$ over an algebraic division ring*, Bull. Amer. Math. Soc., 50(1944), 202—207.

[6] J. Lawrence and G. E. Simons, *Equations in division rings—a survey*, Amer. Math. Monthly, 96(1989), 220—232.

[7] I. Niven, *Equations in quaternions*, Amer. Math. Monthly, 48(1941), 654—661.

[8] Zhang Shengzhu and Mu Dalu, *A note on the left and right zeros of polynomials over division rings*, J. Xinyang Teachers College, Vol. 4(1991), No. 4, 19—22.

Quadratic Equations over Noncommutative Division Rings

Zhang Shengzhu *Mu Dalu*

(Dept. of Math., Xinyang Teachers College)

Abstract

We discuss the distribution problem of the right zeros of the special quadratic equation $(x-\beta)(x-\alpha)=0$ over noncommutative division rings, and whereby we obtain a new method for solving the quadratic equation $x^2+ax+b=0$ over quaternion rings $R(i,j,k)$.