第14卷第2期 数学研究与评论 Vol. 14 No. 2
1994年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1994

非交换主理想整环上分块矩阵的秩*

庄 瓦 金
(漳州师范学院数学系,363000)

摘 要 本文从非交换主理想整环 R 上矩阵 A 的秩与它在 R 所嵌入的商除环 K 上的秩间的关系着手,证得了 R 上分块矩阵秩的一些结果,因此也解决了[1]中关于 p—除环上矩阵秩的一个猜想.

关键词 非交换主理想整环,除环,矩阵的秩,(1)—逆

§1 引言与引理

最近,屠伯埙猜想[1],对于 p—除环[2]上矩阵有以下秩公式:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B + \operatorname{rank}(I_s - BB^+)C(I_n - A^+A).$$

在这篇文章中,我们注意到谢邦杰关于非交换 Euclid 环上矩阵秩的论述[3],将其秩的定义延拓到非交换主理想整环 R 上矩阵的情形,给出了 R 上矩阵 A 的秩与 A 在 R 所嵌入的商除环 K 上的秩之间的关系,证得了 R 上的分块矩阵 (A,B),$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} A & B \\ C & B \end{pmatrix}$ 秩的一些结果,因此也解决了屠的猜想.

本文约定,R 是一个非交换主理想整环,它有单位元 1,其定义如[4,5]所述;K 是一个除环,当它与 R 相联系时,总认为 K 是 R 所嵌入的商除环. R 与 K 上矩阵的表示,按通常记号示之. 设 $A\in K^{m\times n}$,记 $R_r(A)=\{AX \mid X\in K^{n\times 1}\}$,称为 A 在 K 上的右列空间.

按[3],我们有

定义 1 设 $A\in R^{m\times n}$,A 中最大的非零因子的子方块的阶数叫做 A 的秩,记为 Rank A. 当 $A=0$ 时,规定 Rank $A=0$.

设 $A\in K^{m\times n}$,记 A 的秩(定义如[6])为 rank A.

在§2 中,我们需要一些引理. 首先,由[4]定理 16 及其证明知道

引理 1 设 $A\in R^{m\times n}$,则 A 可经过有限次初等变换化为 $\begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,其中

$$D_r = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_r) \in R^{r\times r}, a_i \mid a_j, 1 \leqslant i < j \leqslant r.$$

于是,存在 $P\in GL_m(R)$,$Q\in GL_n(R)$,使 $A=P\begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$.

由此,类似于[3]的证明有

* 1991年9月14日收到. 福建省教委科研基金资助课题.

引理 2 设 $A\in R^{m\times n}$，$P\in GL_m(R)$，$Q\in GL_n(R)$，则

$$\text{Rank } A=\text{Rank } PA=\text{Rank } AQ=\text{Rank } PAQ.$$

引理 3 设 $A\in R^{m\times n}$，$B\in R^{n\times t}$，则 Rank $AB\leqslant\min(\text{Rank } A,\text{Rank } B)$.

上述两引理的正确性，还可由以下的 Rank A 与 rank A 的相等关系及除环上矩阵秩的相应结果推得.

引理 4 设 $A\in R^{m\times n}$，则 Rank A=rank A.

证明 若 $A=0$，则引理的正确性是显然的. 设 Rank $A=r>0$，则 A 有一个 r 阶子块 A_r 非零因子. 于是由引理 1 易见有 $P,Q\in GL_r(R)$，使 $A_r=PD_rQ$，$D_r=\text{diag}(a_1,\cdots,a_r)$，其中 a_i 全不为零. 因此，在 R 所嵌入的商除环 K 上，A_r 可逆，从而有 rank $A\geqslant r$. 故 Rank $A\leqslant$rank A. 设 rank $A=t$，则 A 有一个 t 阶子块 A_t 在 K 上可逆. 在 R 上，设 $A_tX=0$，$X\in R^{t\times s}$，则由 $A_t\in GL_t(K)$ 知道在 K 上有 $X=A_t^{-1}A_tX=0$，故 $X=0$. 类似可证，在 R 上若 $YA_t=0$，则 $Y=0$. 因此，A_t 在 R 上非零因子. 于是 Rank $A\geqslant t$=rank A. 故 Rank A=rank A. 证毕.

在 §2 中，我们还将利用矩阵广义逆的术语，其定义如[7]所述. 至于广义逆的存在性，由引理 1 不难证明：A 是(von Neumann)正则的，即存在 $X\in R^{n\times m}$，使 $AXA=A$，当且仅当存在 $P\in GL_m(R)$，$Q\in GL_n(R)$，使 $A=P\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$. 此时，$A$ 的(1)－逆具有[8]中(6)式所示的一般形式.

§2 分块矩阵秩的某些结果

定理 1 设 $(A,B)\in R^{m\times(n+t)}$，$\begin{pmatrix}A\\ C\end{pmatrix}\in R^{(m+s)\times n}$. 若 A,B,C 皆正则，那么

$$\text{Rank}(A,B)=\text{Rank } A+\text{Rank}(I_m-AA^{(1)})B=\text{Rank } B+\text{Rank}(I_m-BB^{(1)})A, \tag{1}$$

$$\text{Rank}\begin{pmatrix}A\\ C\end{pmatrix}=\text{Rank } A+\text{Rank } C(I_n-A^{(1)}A)=\text{Rank } C+\text{Rank } A(I_n-C^{(1)}C), \tag{2}$$

其中 $X^{(1)}$ 是 R 上正则矩阵 X 的任意确定的(1)－逆.

证明 由 A 正则知 $A^{(1)}$ 存在，注意到$\begin{pmatrix}I_n & -A^{(1)}B\\ 0 & I_t\end{pmatrix}$在 R 上可逆，则由引理 2 有

$$\text{Rank}(A,B)=\text{Rank}(A,B)\begin{pmatrix}I_n & -A^{(1)}B\\ 0 & I_t\end{pmatrix}=\text{Rank}(A,(I_m-AA^{(1)})B). \tag{3}$$

考虑$(A,(I_m-AA^{(1)})B)$在 R 所嵌入的商除环 K 上的右列空间，有

$$R_r((A,(I_m-AA^{(1)})B))=R_r(A)+R_r((I_m-AA^{(1)})B).$$

设 $\alpha\in R_r(A)\cap R_r((I_m-AA^{(1)})B)\subseteq K^m$，则有 K 上的列向量 β,γ 使 $\alpha=A\beta=(I_m-AA^{(1)})B\gamma$. 注意到 $I_m-AA^{(1)}$ 是幂等矩阵，则有

$$\alpha=(I_m-AA^{(1)})^2B\gamma=(I_m-AA^{(1)})A\beta=0.$$

于是，由[6]P284 定理 6 知道

$$\dim R_r((A,(I_m-AA^{(1)})B)=\dim R_r(A)+\dim R_r((I_m-AA^{(1)})B),$$

即

$$\text{rank }(A,(I_m-AA^{(1)})B)=\text{rank } A+\text{rank }(I_m-AA^{(1)})B.$$

因此，由(3)与引理 4 知

$$\mathrm{Rank}(A,B) = \mathrm{Rank}\, A + \mathrm{Rank}(I_m - AA^{(1)})B.$$

由 B 的正则性与 $(A,B)\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B^{(1)}A & I_t \end{pmatrix} = ((I_m - BB^{(1)})A, B)$，类似可证 $\mathrm{Rank}(A,B) = \mathrm{Rank}\, B + \mathrm{Rank}(I_m - BB^{(1)})A$，(1)得证.

类似可证(2)成立. 证毕.

定理 2 设 $A\in R^{m\times n}, B\in R^{t\times s}, C\in R^{t\times n}$. 若 A,B 皆正则，那么

$$\mathrm{Rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = \mathrm{Rank}\, A + \mathrm{Rank}\, B + \mathrm{Rank}(I_t - BB^{(1)})C(I_n - A^{(1)}A), \tag{4}$$

这里 $X^{(1)}$ 是 R 上正则矩阵 X 的任意确定的(1)－逆.

证明 由 A,B 的正则性知 $A^{(1)}, B^{(1)}$ 存在，且 $(A,0)$ 也正则，其中 $\begin{pmatrix} A^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \in (A,0)\{1\}$. 于是应用定理 1 得

$$\begin{aligned}\mathrm{Rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} &= \mathrm{Rank}(A,0) + \mathrm{Rank}(C,B)(I_{n+s} - \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}(A,0)) \\ &= \mathrm{Rank}\, A + \mathrm{Rank}(C(I_n - A^{(1)}A), B) \\ &= \mathrm{Rank}\, A + \mathrm{Rank}\, B + \mathrm{Rank}(I_t - BB^{(1)})C(I_n - A^{(1)}A).\end{aligned}$$

证毕.

现在，由定理 2 与[2]定理 2，可证得[1]的猜想：

推论 1 设 K 是 p－除环，$A\in K^{m\times n}, B\in K^{t\times s}, C\in K^{t\times n}$，则

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\, A + \mathrm{rank}\, B + \mathrm{rank}(I_t - BB^+)C(I_n - A^+A),$$

其中 X^+ 是 K 上矩阵 X 的 Moore－Penrose 逆.

为了叙述 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的秩公式，我们引入

定义 2 设 $A\in R^{m\times n}$,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in R^{(m+t)\times(n+t)}. \tag{5}$$

若 $A(D)$ 正则，$A^{(1)}(D^{(1)})$ 是 $A(D)$ 的一个(1)－逆，则称 $D - CA^{(1)}B(A - BD^{(1)}C)$ 为 M 中 $A(D)$ 关于 $A^{(1)}(D^{(1)})$ 的广义 Schur 补，记作 $(M/A)_{A^{(1)}}((M/D)_{D^{(1)}})$.

定理 3 设 M 如(5)所示，A 正则，那么

$$\mathrm{Rank}\, M = \mathrm{Rank}\, A + \mathrm{Rank}\begin{pmatrix} 0 & (I_m - AA^-)B \\ C(I_n - A^\sim A) & (M/A)_{A^{(1)}} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

其中 $A^{(1)}, A^-, A^\sim \in A\{1\}$ 是任意确定的.

证明 对于任意确定的 $A^{(1)}, A^- \in A\{1\}$，记

$$E = (I_m - AA^-)B, F = C(I_n - A^{(1)}A), G = (M/A)_{A^{(1)}} - FA^-B,$$

则

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{(1)} & I_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -A^-B \\ 0 & I_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & E \\ F & G \end{pmatrix}.$$

于是由引理 2 知 Rank $M=\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}A & E\\ F & G\end{pmatrix}$. 由定理 1 的证明知道，在 R 所嵌入的商除环 K 上，有 $R_r(A)\cap R_r(E)=\{0\}$，因而有 $R_r\left(\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\cap\left(\begin{pmatrix}0 & E\\ F & G\end{pmatrix}\right)=\{0\}$. 事实上，若 $\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$，则结论是显然的. 假如 $\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq 0$ 时结论不真，则在 K 上有 $\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 的非零列可经 $\begin{pmatrix}0 & E\\ F & G\end{pmatrix}$ 的列右线性表示，从而有 A 的非零列可经 E 的列右线性表示，与 $R_r(A)\cap R_r(E)=\{0\}$ 矛盾. 于是，类似于定理 1 的证明，有

$$\mathrm{Rank}\ M=\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}0 & E\\ F & G\end{pmatrix}=\mathrm{Rank}\ A+\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}0 & E\\ F & G\end{pmatrix}.$$

又

$$\begin{pmatrix}0 & E\\ F & G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & E\\ F & (M/A)_{A^{(1)}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & -A^{-}B\\ 0 & I_t\end{pmatrix},$$

则由引理 2 知道

$$\mathrm{Rank}\ M=\mathrm{Rank}\ A+\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}0 & E\\ F & (M/A)_{A^{(1)}}\end{pmatrix}. \tag{7}$$

再注意到

$$\begin{pmatrix}0 & E\\ F & (M/A)_{A^{(1)}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & E\\ C(I_n-A^{\sim}A) & (M/A)_{A^{(1)}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n-A^{-}A & 0\\ 0 & I_t\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0 & E\\ C(I_n-A^{\sim}A) & (M/A)_{A^{(1)}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & E\\ F & (M/A)_{A^{(1)}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n-A^{\sim}A & 0\\ 0 & I_t\end{pmatrix},$$

其中 $A^{\sim}\in A\{1\}$ 也是任意确定的，则由引理 3 得到

$$\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}0 & E\\ F & (M/A)_{A^{(1)}}\end{pmatrix}=\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}0 & E\\ C(I_n-A^{\sim}A) & (M/A)_{A^{(1)}}\end{pmatrix},$$

故由(7)知道(6)成立. 证毕.

类似可证

定理 3′ 设 M 如(5)所示，D 正则，那么

$$\mathrm{Rank}\ M=\mathrm{Rank}\ D+\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}(M/D)_{D^{(1)}} & B(I_t-D^{-}D)\\ (I_s-DD^{\sim})C & 0\end{pmatrix}, \tag{6′}$$

这里 $D^{(1)},D^{-},D^{\sim}\in D\{1\}$ 是任意确定的.

推论 2 设 M 如(5)所示.

(i) 若 A 正则，则 $\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}0 & (I_m-AA^{-})B\\ C(I_n-A^{\sim}A) & (M/A)_{A^{(1)}}\end{pmatrix}$ 对于 A 的(1)－逆 $A^{(1)},A^{-},A^{\sim}$ 的任意选择是不变的.

(ii) 若 D 正则，则 $\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}(M/D)_{D^{(1)}} & B(I_t-D^{-}D)\\ (I_s-DD^{\sim})C & 0\end{pmatrix}$ 对于 D 的(1)－逆 $D^{(1)},D^{-},D^{\sim}$ 的任意选择是不变的.

定理 3 系[9,10]中复矩阵秩的相应结果在非交换主理想整环上的推广与改进. 由之，我们还得到[10]定理 6.1(a)，[11]定理 4.1，推论 4.1 的如下相应推广.

推论 3 设 M 如(5)所示.

(i) 若 A 正则,则

$$\text{Rank } M \geqslant \text{Rank } A + \text{Rank}(M/A)_{A^{(1)}}, \tag{8}$$

这里 $A^{(1)} \in A\{1\}$;并且(8)取等号的充要条件是

$$\text{Rank}\begin{pmatrix} & (I_m - AA^{(1)})B \\ C(I_n - A^{(1)}A) & (M/A)_{A^{(1)}} \end{pmatrix} = \text{Rank}(M/A)_{A^{(1)}}. \tag{9}$$

(ii) 若 $R=K$ 是一个除环,则(8)取等号的充要条件是

$$\begin{cases} (I_m - AA^{(1)})B(I_t - (M/A)^{(1)}M/A) = 0 \\ (I_s - M/A(M/A)^{(1)})C(I_N - A^{(1)}A) = 0 \\ (I_m - AA^{(1)})B(M/A)^{(1)}C(I_n - A^{(1)}A) = 0 \end{cases}, \tag{10}$$

这里记 $(M/A)_{A^{(1)}} = M/A$, $(M/A)^{(1)} \in (M/A)\{1\}$.

证明 由定理 3 与定义 1 易见(i)成立. 注意到除环上矩阵是正则的[12],则在 K 上,由定理 3、3′知道

$$\text{rank } M = \text{rank } A + \text{rank}\begin{pmatrix} 0 & E \\ F & M/A \end{pmatrix} = \text{rank } A + \text{rank } M/A$$
$$+ \text{rank}\begin{pmatrix} -E(M/A)^{(1)}F & E(I_t - (M/A)^{(1)}M/A) \\ (I_s - M/A(M/A)^{(1)}F) & 0 \end{pmatrix}$$

因此,易见(8)取等号的充要条件是(10)成立,故(ii)正确. 证毕.

推论 4 设 M 如(5)所示.

(i) 若 A 正则,$A^{(1)} \in A\{1\}$,则

$$\text{Rank } M \leqslant \text{Rank } A + \text{Rank } B + \text{Rank } C + \text{Rank}(M/A)_{A^{(1)}}. \tag{11}$$

(ii) 若 D 正则,$D^{(1)} \in D\{1\}$,则

$$\text{Rank } M \leqslant \text{Rank } D + \text{Rank } B + \text{Rank } C + \text{Rank}(M/D)_{D^{(1)}}. \tag{11'}$$

证明 设 E,F 如定理 3 证明所示,则在除环上有

$$\begin{aligned}\text{rank}\begin{pmatrix} 0 & E \\ F & (M/A)_{A^{(1)}} \end{pmatrix} &\leqslant \text{rank } E + \text{rank}(F, (M/A)_{A^{(1)}}) \\ &\leqslant \text{rank } E + \text{rank } F + \text{rank}(M/A)_{A^{(1)}} \\ &\leqslant \text{rank } B + \text{rank } C + \text{rank}(M/A)_{A^{(1)}}.\end{aligned}$$

于是,由引理 4 与定理 3 知道(i)成立.

类似可证(ii)成立. 证毕.

推论 5 设 $R=K$ 是除环,M 如(5)所示,则

$$\begin{aligned}\text{rank } M = & \text{rank } A + \text{rank}(I_m - AA^{(1)})B + \text{rank } C(I_n - A^{(1)}A) + \text{rank}(I_s - C(I_n - A^{(1)}A) \\ & \cdot (C(I_n - A^{(1)}A)^{(1)})(M/A)_{A^{(1)}}(I_t - ((I_m - AA^{(1)})B)^{(1)}(I_m - AA^{(1)})B),\end{aligned}$$

其中 $X^{(1)} \in X\{1\}$.

证明 注意到

$$\text{rank}\begin{pmatrix} 0 & (I_m - AA^{(1)})B \\ C(I_n - A^{(1)}A) & (M/A)_{A^{(1)}} \end{pmatrix} = \text{rank}\begin{pmatrix} (I_m - AA^{(1)})B & 0 \\ (M/A)_{A^{(1)}} & C(I_n - A^{(1)}A) \end{pmatrix}$$

及除环上矩阵的正则性，则由定理 3、2 知道本推论正确. 证毕.

参 考 文 献

[1] 屠伯埙，体上线性映射的子空间的维数及其应用，数学研究与评论，10:3(1990)，327—332.

[2] 屠伯埙，p—除环上矩阵的广义逆，数学学报，29:2(1986)，246—248.

[3] 谢邦杰，环与体上的矩阵及两类广义 Jordan 形式，吉林大学学报(自)，1(1978)，21—46.

[4] N. Jacobson, *The Theory of Rings*, Math. Surveys 2, Amer. Math. Soc., 1943.

[5] 万哲先，特征数$\neq 2$ 的非交换主理想整环上线性群的自同构，数学学报，7:4(1957)，533—573.

[6] 谢邦杰，抽象代数学，上海科学技术出版社，1982.

[7] 庄瓦金，范畴中态射的广义逆，数学学报，31:1(1988)，39—45.

[8] 庄瓦金，Euclid 环上矩阵的 $(1,\cdots,i)$ —逆，曲阜师范大学学报(自)，15:4(1989)，39—43.

[9] G. Marsaglia and G. P. H. Styan, *Equalities and inequalities for rank of matrices*, Lin. Mul. Alg., 2(1974), 269—292.

[10] H. Goller, *Shorted operators and rank decomposition matrices*, Lin. Alg. Appl., 81(1986), 207—236.

[11] C. D. Jr. Meyer, *Generalized inverses and ranks of block matrices*, SIAM J. Appl. Math., 25:4(1973), 597—602.

[12] 庄瓦金，体上矩阵的广义逆，数学杂志，6:1(1986)，105—112.

The Rank of Partitioned Matrices over Non-Commutative Principal Ideal Domain

Zhuang Wajin

(Zhangzhou Normal College)

Abstract

Using the fact that a non-commutative principal ideal domain can be imbedded in a quotient division ring, we prove some results on the rank of partitioned matrices over a non-commutative principal ideal domain, and then solve the conjecture for the rank of matrices over a p-division ring in [1].