第14卷第2期 数学研究与评论 Vol. 14 No. 2
1994年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1994

FP—内射环的一个特征*

陈 建 龙
（东南大学数力系，南京 210018）

摘 要 本文首次利用投射模给出了右 FP—内射环的一个外部特征，即 R 为右 FP—内射环当且仅当投射左 R—模的有限生成子模为闭子模.

关键词： FP—内射模，投射模，闭子模.

作为比内射模更广的 FP—内射模（也称绝对纯模）和 F—内射模（也称上平坦模）在模论中的重要性正越来越显示出来[1]-[7]. 本文的目的是借助投射模或自由模从外部来刻画右 FP—内射环. 其主要结果是证明：R 为右 FP—内射环（右 F—内射环）当且仅当投射左 R—模的有限生成（循环）子模为闭子模. 文中所指环均是有单位元的结合环，模指酉模.

设 P 为左 R—模，L 为 P 的子模，S 为右 R—模 $P^*=\mathrm{Hom}_R(P,R)$ 的子模，记

$$L^{\perp}=\{f\in P^*\mid f(x)=0,\forall\, x\in L\},$$
$$S^{\perp}=\{x\in P\mid f(x)=0,\forall\, f\in S\}.$$

如果 $L=L^{\perp\perp}$，则 L 称为 P 的闭子模.

当 P 为有限生成自由模 R^n 时，则 $P^*=(R^n)^*=R^n$，规定：

$$a\circ b=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,\ a=(a_1,\cdots,a_n),\ b=(b_1,\cdots,b_n)\in R^n.$$

此时易知：

$$L^{\perp}=\{b\in R^n\mid a\circ b=0,\forall\, a\in L\};\ S^{\perp}=\{b\in R^n\mid b\circ a=0,\forall\, a\in S\}.$$

为方便起见，用 $r(L)$ 表示 $L^{\perp}$，用 $l(S)$ 表示 $S^{\perp}$，于是 L 为闭子模的充要条件为 $L=l(L)$. 当 $n=1$ 时，r，l 分别就是通常意义下的右，左零化子.

同样地，如果 M 为右 R—模，$S\subset R^n$，记

$$l_{M^n}(S)=\{x\in M^n\mid x\circ s=0,\forall\, s\in S\},$$

这里 $x\circ s=\sum_{i=1}^{n}x_is_i$，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in M^n$，$s=(s_1,\cdots,s_n)\in S$.

定义 右 R—模 M 称为 FP—内射模，如果对任何有限生成自由右 R—模 P 的任何有限生成子模 L，每个 L 到 M 的同态都可扩张成 P 到 M 的同态. M 称为 F—内射模，如果对任何有限生成右理想 I，每个右 R—模同态 $f:I\to M$，均存在 $y\in M$，使得 $f(a)=ya$，$\forall\, a\in I$.

引理 1[7] M 为右 F—内射模当且仅当以下两条件满足：

(i) $l_M(I_1\cap I_2)=l_M(I_1)+l_M(I_2)$，对任何有限生成右理想 I_1 和 I_2；

* 1991年10月10日收到.

(ii) $l_M r(a)=Ma$，对任何 $a\in R$.

引理 2 设 M 为右 R－模，则以下几条等价：

(1) M 为 FP－内射模.

(2) M 为其内射闭包 $E(M)$ 的纯子模.

(3) 方程 $(m_1,\cdots,m_n)=(x_1,\cdots,x_p)A$ 若在 $E(M)^p$ 中有解．则在 M^p 中也有解．这里 A 为 R 上 $p\times n$ 阶矩阵．$m_i\in M,i=1,\cdots,n$.

(4) 对有限生成自由模 R^n 的任意有限生成子模 L，任意同态 $f:L\to M$，都存在 $y\in M^n$，使得 $f(u)=y\circ u,\forall\ u\in L$.

下面的定理 1 和定理 2 推广了[8,Th1]，其证明思路属于 E. R. Gentile.

定理 1 右 R－模 M 为 F－内射模的充要条件为 $l_{M^n}r(a)=Ma,\ \forall\ a\in R^n$.

证明 *充分性* 设 $I=a_1R+\cdots+a_nR$ 为有限生成右理想，$f:I\to M$ 为右 R－模同态.

记 $x_i=f(a_i),i=1,\cdots,n$，并令 $(x_1,\cdots,x_n)=x,(a_1,\cdots,a_n)=a$，则

$$x\in l_{M^n}r(a)=Ma$$

于是存在 $y\in M$，使得 $x=ya$，故 $f(a_i)=x_i=ya_i$，f 是左乘 y 的同态，这样，M 为 F－内射模.

必要性 当 $n=1$ 时，由引理 1 结论成立．现设结论对 $n-1$ 成立.

记 $a=(a_1,\cdots,a_n)\in R^n$，并令

$$T_1=\{(r_1,0,\cdots,0)\in R^n|a_1r_1=0\},$$

$$T_2=\{(0,r_2,\cdots,r_n)\in R^n|a_2r_2+\cdots+a_nr_n=0\}.$$

明显地，$T_1,T_2\subset r(a)$，设 $u=(u_1,\cdots,u_n)\in l_{M^n}r(a)$，则 $u_1\in l_M r(a_1)=Ma_1$，故 $u_1=ta_1,t\in M$.

$$u-ta=(u_1,\cdots,u_n)-t(a_1,\cdots,a_n)=(0,v_2,\cdots,v_n)\in l_{M^n}r(a)\subset l_{M^n}(T_2),$$

于是让 $\bar{a}=(a_2,\cdots,a_n)\in R^{n-1}$．有

$$(v_2,\cdots,v_n)\in l_{M^{n-1}}l(\bar{a})=M\bar{a},$$

即存在 $x\in M$，使 $(v_2,\cdots,v_n)=x(a_2,\cdots,a_n)$，故

$$v=(0,v_2,\cdots,v_n)=x(0,a_2,\cdots,a_n).$$

现令 $I_1=a_1R,I_2=a_2R+\cdots+a_nR$，并设 $z\in I_1\cap I_2$，那么

$$z=a_1b_1=-(a_2b_2+\cdots+a_nb_n),\ b_i\in R,$$

即 $b=(b_1,\cdots,b_n)\in r(a)$．注意到 $v\in l_{M^n}r(a)$，于是 $v\circ b=0$，即 $\sum_{i=2}^{n}(xa_i)b_i=0$，或者 $xz=0$，由此知：$x\in l_M(I\cap I_2)$，由引理 1，$x=m_1+m_2,m_i\in l_M(I_i),i=1,2$.

$$v=(0,xa_2,\cdots,xa_n)=(0,(m_1+m_2)a_2,\cdots,(m_1+m_2)a_n)$$
$$=(0,m_1a_2,\cdots,m_1a_n)=m_1(a_1,\cdots,a_n)=m_1a,$$

于是 $u=ta+v=(t+m_1)a\in Ma$，故 $l_{M^n}r(a)\subset Ma$，反过来的包含是显然的，至此必要性证毕.

定理 2 设 M 为右 R－模，则以下几条等价：

(1) M 为 FP－内射模.

(2) $l_{M^n}r\{a_1,\cdots,a_m\}=Ma_1+\cdots+Ma_m,\ \forall\ a_i\in R^n,i=1,\cdots,m.$

(3) $l_{M^n}r\{a_1,\cdots,a_n\}=Ma_1+\cdots+Ma_n,\ \forall\ a_i\in R^n,i=1,\cdots,n.$

证明 (1)⇒(2) 设 $a_i=(a_{1i},\cdots,a_{ni})\in R^n,i=1,\cdots,m$，若 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in l_{M^n}r\{a_1,\cdots,a_m\}$，取 $b_i=(a_{i1},\cdots,a_{im})\in R^m,i=1,\cdots,n$．规定

$$g: b_1R + \cdots + b_nR \to M,\ \sum_{i=1}^{n} b_i t_i \to \sum_{i=1}^{n} x_i t_i.$$

容易验证此定义良好且是一个右 R－模同态. 由引理 2,存在 $y=(y_1,\cdots,y_m)\in M^m$ 使得

$$g(u) = y \circ u, \forall\ u \in b_1R + \cdots + b_nR.$$

特别地,

$$x_i = g(b_i) = y \circ b_i = \sum_{j=1}^{m} y_j a_{ij},$$

$$x = (x_i) = (\sum_{j=1}^{m} y_j a_{ij}) = y_1a_1 + \cdots + y_m a_m \in Ma_1 + \cdots + Ma_m.$$

故 $l_{M^n}r\{a_1,\cdots,a_m\}\subset Ma_1+\cdots+Ma_m$. 反过来的包含是显然的,故(2)式成立.

(2)⇒(3) 是显见的.

(3)⇒(1) 设 A 为 R 上 $m\times n$ 阶矩阵,考虑方程 $u=xA$,其中 $u=(u_1,\cdots,u_n)\in M^n$, $x=(x_1,\cdots,x_m)$.

当 $n>m$ 时,令 $\bar{x}=(x,0)$, $\bar{A}=\begin{pmatrix}A\\0\end{pmatrix}$ 为 $n\times n$ 阶矩阵,那么 $u=xA$ 等价于 $u=\bar{x}\bar{A}$;当 $n<m$ 时,令 $\bar{u}=(u,0)$, $\bar{A}=(A,0)$ 为 $m\times m$ 阶矩阵,那么 $u=xA$ 等价于 $\bar{u}=x\bar{A}$.

于是不妨设 A 为 $n\times n$ 阶矩阵. 若 $u=xA$ 在 $E(M)^n$ 中有解,把此解仍记成 x,即 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in E(M)^n$,

$$u_i = \sum_j x_j r_{ij},\ r_{ij} \in R, i = 1,\cdots,n$$

现记 $a_j=(r_{1j},\cdots,r_{nj})$, $j=1,\cdots,n$. 则易知

$$u \in l_{M^n}r\{a_1,\cdots,a_n\} = Ma_1 + \cdots + Ma_n,$$

即存在 $y_1,\cdots,y_n\in M$,

$$u = y_1a_1 + \cdots + y_na_n = \sum_{j=1}^{n} y_j(r_{1j},r_{2j},\cdots,r_{nj}) = (\sum_{j=1}^{n} y_j r_{ij}) = yA.$$

故方程 $u=xA$ 在 M^n 中有解,由引理 2 知,M 为 FP－内射模.

现在取 $M=R$,则有如下定理的(1)与(3)等价.

定理 3 以下几条等价

(1) R 为右 FP－内射环.

(2) 投射左 R－模的有限生成子模为闭子模.

(3) 有限生成自由左 R－模的有限生成子模为闭子模.

证明 只要证(1)⇒(2). 设 P 为投射左 R－模,L 为其有限生成子模,记 $L=Ra_1+\cdots+Ra_m$, $a_i\in P$,由对偶基引理,存在 $\{f_i|i\in T\}\subset P^*$, $\{x_i|i\in T\}\subset P$,使得对 $j=1,\cdots,m$.

$$f_i(a_j) = 0, i \in T - I_j, a_j = \sum_{i\in I_j} f_i(a_j)x_i,$$

这里 I_j 为 T 的有限子集, $j=1,\cdots,m$. 现设 $x\in L^{\perp\perp}$,同理可知,存在 T 的有限子集 I_0,使得

$$f_i(x) = 0,\ i \in T - I_0, x = \sum_{i\in I_0} f_i(x)x_i.$$

令 $K=I_0\cup I_1\cup\cdots\cup I_m$,那么 K 为 T 的有限子集,且

$$a_j = \sum_{i\in K} f_i(a_j)x_i,\ x = \sum_{i\in K} f_i(x)x_i.$$

为方便起见，设 $K=\{1,2,\cdots,n\}$，并记

$$b_i=(f_i(a_1),\cdots,f_i(a_m))\in R^m,\ i\in K.$$

于是 $\sum\limits_i b_iR$ 为 R^m 的有限生成子模，令

$$g:\ \sum_i b_iR\rightarrow R,\ \sum_i b_ir_i\rightarrow\sum_i f_i(x)r_i.$$

若 $\sum\limits_i b_ir_i=0$，那么 $\sum\limits_i f_i(a_j)r_i=0,j=1,\cdots,m$. 于是 $(\sum\limits_i f_ir_i)(L)=0$，即 $\sum\limits_i f_ir_i\in L^\perp$，故 $\sum\limits_i f_i(x)r_i=(\sum\limits_i f_ir_i)(x)=0$. 由此可见，$g$ 定义良好且为右 R－模同态. 由引理 2，存在 $u=(u_1,\cdots,u_m)\in R^m$. 使得 $g(t)=u\circ t$，于是

$$f_i(x)=g(b_i)=u\circ b_i=u_1f_i(a_1)+\cdots+u_mf_i(a_m)=\sum_{j=1}^m u_jf_i(a_j),$$

$$x=\sum_i f_i(x)x_i=\sum_i\sum_j u_jf_i(a_j)x_i=\sum_j u_j\sum_i f_i(a_j)x_i=\sum_j u_ja_j\in L.$$

所以 $L^{\perp\perp}\subset L$，而 $L\subset L^{\perp\perp}$ 是明显的，于是 $L=L^{\perp\perp}$，即 L 为闭子模.

应用定理 1，同理可证如下定理.

定理 4 以下几条等价：

(1) R 为右 F－内射环.

(2) 投射左 R－模的循环子模为闭子模.

(3) 有限生成自由左 R－模的循环子模为闭子模.

在定理 3 的证明中取 $K=T=\{1\}$，再结合[7，推论 3]有

定理 5 以下两条等价：

(1) $\mathrm{Ext}_R^1(F/K,R)=0$，$K$ 为有限生成自由右 R－模 F 的循环子模.

(2) 循环投射左 R－模的有限生成子模为闭子模.

作为定理 2 的一个应用，最后给出左 FC 环(即左凝聚环且为左 F－内射环[5])上 FP－内射右 R－模的一个刻画. 为此先列出[8]中的引理 1，2，即

设 $a_1,\cdots,a_m\in R^n$，$S=Ra_1+\cdots+Ra_m$，记

$$S_1=\{(0,b)\in S\,|\,b\in R^{n-1}\},\ B=\{b\in R^{n-1}\,|\,(0,b)\in S\}.$$

引理 3 设 R 为左凝聚环，则 S_1 为 R^n 的有限生成子模.

引理 4 设 R 为左 F－内射环，则若 $(x_2,\cdots,x_n)\in r(B)$. 那么存在 $x_1\in R$，使得

$$(x_1,\cdots,x_n)\in r(S).$$

定理 6 设 R 为左 FC 环. 若对任意有限生成左理想 I，右 R－模 M 满足 $l_Mr(I)=MI$，那么 M 为 FP－内射模.

证明 由定理 2，只要证对 $a_i\in R^n,i=1,\cdots,m$，若 $u\in l_{M^n}r\{a_1,\cdots,a_m\}$，则 $u\in Ma_1+\cdots+Ma_m$.

当 $n=1$ 时，此时 $a_i\in R$. 由假设即知等式成立. 现假设 $n-1$ 时成立. 记

$$u=(u_1,\cdots,u_n)\in l_{M^n}r\{a_1,\cdots,a_m\},\ a_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})\in R^n,$$

则可以验证，$u_1\in l_Mr\{a_{11},\cdots,a_{m1}\}$，再由已知条件，$u_1=t_1a_{11}+\cdots+t_ma_{m1}$，$t_i\in M$，$i=1,\cdots,m$. 令

$$u'=\sum_i t_ia_i\in Ma_1+\cdots+Ma_m\subset l_{M^n}r\{a_1,\cdots,a_m\},$$

$$v=u-u'=(0,v_2,\cdots,v_n)\in l_{M^n}r\{a_1,\cdots,a_m\}.$$

于是对任意 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in r\{a_1,\cdots,a_m\}$，$v\circ x=0$ 即 $\sum_{i=2}^{n}v_ix_i=0$. 现令

$$D=\{(x_2,\cdots,x_n)\in R^{n-1}\mid \exists\ x_1\in R,\text{使}(x_1,\cdots,x_n)\in r\{a_1,\cdots,a_m\}\}.$$

于是 $(v_2,\cdots,v_n)\in l_{M^{n-1}}(D)$. 现记 $S=Ra_1+\cdots+Ra_m$,

$$S_1=\{(0,b)\in S\mid b\in R^{n-1}\},\ B=\{b\in R^{n-1}\mid (0,b)\in S\}$$

此时显然有 $D\subset r(B)$，由引理 4，$r(B)\subset D$. 故 $D=r(B)$，再由引理 3，S_1 为有限生成，记

$$S_1=Rk_1+\cdots+Rk_p,\ k_i\in R^n,\ i=1,\cdots,p.$$

记 $k_i=(0,b_i)$，$b_i\in R^{n-1}$，则 $B=Rb_1+\cdots+Rb_p$，且

$$(v_2,\cdots,v_n)\in l_{M^{n-1}}(D)=l_{M^{n-1}}r(B)=Mb_1+\cdots+Mb_p,$$

$$(0,v_2,\cdots,v_n)\in Mk_1+\cdots+Mk_p\subset Ma_1+\cdots+Ma_m.$$

于是 $u=u'+v\in Ma_1+\cdots+Ma_m$. 即 M 为 FP－内射模.

推论 设 R 为左 FC 环，且有限生成左理想为左零化子，则 R 为右 FP－内射环.

参考文献

[1] C. Megibben, *Absolutely pure modules*, Proc. A. M. S., 26(1970), 561—566.

[2] B. Stenstrom, *Coherent rings and FP—injective modules*, J. London Math. Soc., 2(1970), 323—329.

[3] S. Jain, *Flat and FP—injective*, Proc. A. M. S., 2(1973), 437—442.

[4] R. N. Gupta, *On f—injective modules and semihereditary rings*, Proc. Nat. Inst. Sci. India, Part A, 35(1969), 323—328.

[5] R. F. Damiano, *Coflat rings and modules*, Pac. J. Math., 2(1979), 349—369.

[6] 徐岩松，FP—内射模决定凝聚环与 IF—环，数学研究与评论，1(1986)，25—30.

[7] 陈建龙，FP—内射环和 IF 环的几个特征，数学研究与评论，3(1992)，395—400.

[8] E. R. Gentile, *Purity and algebraic closure*, Rev. Un. Mat. Argentina, 1(1968), 37—47.

A Characteristic of FP-injective Rings

Chen Jianlong

(Dept. of Math. & Mech., , Southeast Univ., Nanjing)

Abstract

In this paper, we give an external characterization of right FP-injective rings by means of projective modules. That is, R is a right FP-injective ring if and only if every finitely generated submodule of projective left R-module is closed.