第14卷第2期　　数学研究与评论　　Vol. 14 No. 2
1994年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May. 1994

内—p—闭群及其推广*

黎 先 华
（贵州师范大学数学系，贵阳 550001）

摘　要　非p—闭群G叫拟p—闭群，如果有G的真子群H，当$K\lneqq G$，$K\not\leq H$时，K就是p—闭群.本文证明了下列定理：

定理1　拟p—闭群有下述二型：

Ⅰ　当G可解时，$2\leqslant|\pi(G)|\leqslant 3$.

Ⅱ　当G不可解时，

a）$G/\Phi(G)$为复阶单群.

b）$G=N\rtimes\langle a\rangle$，$N/\Phi(N)$为复阶单群.

定理2　内—5—闭群有下述二大类型：

Ⅰ　$5^\alpha p^\beta$阶p—基本群.

Ⅱ　$G/\Phi(G)$同构于PSL(2,5)，$S_z(2^q)$（q为奇素数）.

关键词　拟p—闭群，内—5—闭群，非可解群，单群分类定理.

内—p—闭群有不少人作过研究，其中最重要的结果收录在[1]的第四章中.这些结果对非p—闭群的研究具有重大意义.本文的目的是开拓内—p—闭群的理论，定出拟p—闭群的结构，并用单群分类定理得到内—5—闭群的结构.

本文只讨论有限群，用$\pi(G)$表示群G的阶的素因子集合，G_p表群G的p—Sylow子群.

§1　拟p—闭群

定义　一个非p—闭群G叫拟p—闭群，如果有G的真子群H，当$K\lneqq G$，$K\not\leq H$时，K就是p—闭群.

由于H可等于单位元群，也可非p—闭，因此拟p—闭群是内—p—闭群的推广.

定理1　拟p—闭群有下述二型：

Ⅰ　当G可解时，$2\leqslant|\pi(G)|\leqslant 3$.

Ⅱ　当G不可解时，

a）$G/\Phi(G)$为复阶单群.

b）$G=N\rtimes\langle a\rangle$，$N/\Phi(N)$为复阶单群.

证明　设G的真子群H满足条件：当$K\lneqq G$，$K\not\leq H$时，K为p—闭群.假定定理1不成立，设G是关于$|G|+|H|$的极小反例.由[1]定理4.1，内—p—闭群都满足定理1，因此极小

* 1991年12月31日收到.贵州省自然科学基金资助项目.

反例不能是内－p－闭群.

若 H 的每个子群都是 p－闭的. 则由假设可得到 G 的每个真子群是 p－闭的，从而 G 内－p－闭，矛盾. 因此可设 H 非 p－闭，自然也就有 $p\mid |H|$.

若有 $x\in G$ 使得 $H^x\neq H$，则 H^x p－闭，由 $H^x\cong H$ 得 H p－闭，矛盾，故 $H\lhd G$. 如果有 G 的真子群 K 使得 $H\lneq K$，那么 $K\not\leq H$. 由假设 K 为 p－闭. 由 $H\leq K$ 得 H p－闭，矛盾. 因此 H 为 G 的正规极大子群，于是 $|G:H|=r$（素数）.

若 $\Phi(G)\neq 1$，由 H 为 G 的极大子群得到 $\Phi(G)\leq H$. 因为 $(G/\Phi(G), H/\Phi(G))$ 仍满足定理 1 的假设，所以 $G/\Phi(G)$ 为定理 1 中所列群，此时 G 也必是定理 1 所列群，矛盾. 因此可设 $\Phi(G)=1$，当然也有 $\Phi(H)=1$.

设 N 为 G 的包含在 H 中的极小正规子群. 设 M 为 N 的极小补，由[2]P. 271，618，$G=MN$，$N\cap M\leq\Phi(M)$. 因为 $M\not\leq H$，$M\neq G$，所以 M 为 p－闭，于是 $M_p\lhd M$，$M_pN\lhd G$.

若 N 可解，则因 N 在 G 中有补子群，所以 $M\cap N=1$. 若 N 为 p－群，则 M_pN 是 G 的正规 p－Sylow 子群，从而 G 为 p－闭，矛盾. 若 N 不是 p－群，由 $M_pN\lhd G$，$M_r(M_pN)$ 是 G 的子群，而且 $M_rM_pN\not\leq H$. 如果 $M_rM_pN\neq G$，那么 M_rM_pN p－闭. $M_pN=M_p\times N$，又 $M_p\lhd M$，$G=MN$，所以 $M_p\lhd G$，此时可归为 N 为 p－子群的情况得到矛盾. 故 $G=M_rM_pN$ 可解，且 $2\leq|\pi(G)|\leq 3$.

若 N 不可解，设 $N=N_1\times N_2\times\cdots\times N_t$，$N_i\cong N_j$ 为非 Abel 单群. 因为 $M_r\not\leq H$，所以 $M_r(M_pN)=G$ 或 $M_r(M_pN)$ p－闭. 当 M_rM_pN p－闭时，N p－闭，N 为 p′－群，$M_p\lhd M_rM_pN$. 于是 $M_pN=M_p\times N$ 得 $M_p\lhd G$，从而 G 为 p－闭，矛盾. 故 $G=M_rM_pN$. 若 N 为 p′－群，对 $p_i\in\pi(N)$，设 R_{p_i} 是 N 的 p_i－Sylow 子群，由 Frattini 推理 $G=N_G(R_{p_i})N$，于是 M_p 共轭地包含在 $N_G(R_{p_i})$ 中，不妨设 $M_p\leq N_G(R_{p_i})$. 由 $N_G(R_{p_i})\not\leq H$，$N_G(R_{p_i})\neq G$ 知，$N_G(R_{p_i})$ p－闭，从而 $M_pM_{p_i}=M_p\times M_{p_i}$. 若对每个 $p_i\in\pi(N)$，这样的 R_{p_i} 都已作出，令 $U=\langle R_{p_i}\mid p_i\in\pi(N)\rangle$，因为 $|R_{p_i}|\mid|U|$，$U\leq N$，所以 $U=N$. 于是 N 中心化 M_p，$M_p\lhd G$，由 $G_p=M_p$ 得 G 为 p－闭，矛盾. 故 $p\mid|N|$，从而只能有 $G=M_rN$. 若有 $y\in M_r$，$y\notin H$ 使得 $\langle y\rangle N\neq G$，则 $\langle y\rangle N$ p－闭，矛盾于 N 非 p－闭，故有 $x\in M$，$x\notin H$ 使得 $G=\langle x\rangle N$.

因为 x 共轭可迁置换 $N_1,N_2,\cdots,N_t$，所以可设：$N_i^x=N_{i+1}\ (i=1,2,\cdots,t-1)$，$N_t^x=N_1$.

令 $D=\{\prod_{i=1}^{t}a^{x^i}\mid a\in N_1\}$，则易见 D 是 N 的子群，且 $D^x=D$，$\langle x,D\rangle=\langle x\rangle D$.

作 Φ: $a\to\prod_{i=1}^{t}a^{x^i}$，$a\in N_1$，则 Φ 是 N_1 到 D 的同构映射，因此 D 非 p－闭. 若 $t>1$，则 $G\neq\langle x\rangle D$，又 $\langle x\rangle D\not\leq H$，所以 $\langle x\rangle D$ p－闭，矛盾于 D 非 p－闭. 故只可能有 $t=1$，N 为单群.

定理 1 证毕.

§2 内－5－闭群

内－2－闭群的结构较简单（参见[1]）. 在[14]中作者用单群分类定理得到了内－3－闭群的结构. 至此，正如[1]（P. 25）中指出，内－5－闭群的研究自然提上议事日程. 在这里我们用单群分类定理获得了如下定理：

定理 2 内－5－闭群有下列二大类：

Ⅰ　$5^{\alpha}p^{\beta}$ 阶 p－基本群.

Ⅱ　$G/\Phi(G)$同构于 PSL(2,5),$S_z(2^q)$(q 为奇素数).

证明　由[1]P.21 定理 4.1,内－5－闭群必为下列二型:

1)　G 是 $5^{\alpha}p^{\beta}$ 阶 p－基本群.

2)　$G/\Phi(G)$为复阶单群.

当 $G/\Phi(G)$为复阶单群时,因为 5－闭这一性质商群闭,所以 $G/\Phi(G)$仍为内－5－闭群.因此我们只须证明复阶内－5－闭单群为 PSL(2,5),$S_z(2^q)$ (q 为奇素数)即可.

由[10,11]可查得,除下列 Lie 型单群

$$A_n(q)(n\leqslant 3),B_2(q),G_2(q),{}^2G_2(3^{2m+1}),{}^2B_2(2^{2m+1}),{}^2A_2(q)$$

以外的 Lie 型单群都有非 5－闭的极大抛物子群,这是因为,1.凡有阶被 5 除尽的单截断的群非 5－闭;2.当$(p,5)=1$时,对任一自然数 K. $p^{4k}=l(\mathrm{mod}\ 5)$,即 $5|p^{4k}-1$.从而都不是内－5－闭群.

因为$|{}^2G_2(3^{2m+1})|=3^{3(2m+1)}(3^{3(2m+1)}+1)(3^{2m+1}-1)$模 5 同余于

$$3\cdot(-1)^m[3\cdot(-1)^m+1][3\cdot(-1)^m-1],$$

所以${}^2G_2(3^{2m+1})$为 $5'$－群,G 不同构于${}^2G_2(3^{2m+1})$.

由[12]定理 9,当且仅当 $2m+1$ 为奇素数时,${}^2B(2^{2m+1})$为内－5－闭群.

由[13]定理 5.2 可得到 $B_2(q)\cong pS_p(4,q)$有非 5－闭的真子群,故 G 不同构于 $B_2(q)$.

$$|G_2(q)|=q^6(q^2-1)(q^3-1)(q^3+1),\text{设 } q=5k+r(0\leqslant r<5),$$

则

$$q^3\pm 1\equiv r^3\pm 1(\mathrm{mod}\ 5),$$

而 $2^3\pm1,3^3\pm1$ 都不是 5 的倍数.因此若 $5|q^3\pm1$,则 $r=1,4$,即 $5|q\pm1$.于是当 $5|q^6(q^2-1)(q^3-1)(q^3+1)$时,5 整除 $q(q^2-1)$.因为 $G_2(q)$的 Levi 子群为 PSL(2,q)其阶为$\frac{1}{d}q(q^2-1)$,$d=(2,q-1)$,故 $G_2(q)$非内－5－闭,G 不同构于 $G_2(q)$.

$A_3(q)$有阶被 5 整除的子群 $pS_p(4,q)$,故 G 不构于 $A_3(q)$.

$A_2(q)$的阶为$\frac{1}{d}q^3(q^3-1)(q^2-1)$,$d=(3,q-1)$.因为当 $5|q^3-1$ 时,$5|q-1$,所以只要 $5||A_2(q)|$,就有 $5|q(q^2-1)$.而 $A_2(q)$有子群同构于 $A_1(q)$,$A_1(q)$的阶为$\frac{1}{d_1}q(q^2-1)$,$d_1=(2,q-1)$,因此 $A_2(q)$非内－5－闭,G 不同构于 $A_2(q)$.

若 $G\cong$PSL(2,q),由 Dickson 定理,当 $q^2\equiv1(\mathrm{mod}\ 5)$时,PSL(2,$q$)有子群 A_5,故 $5\nmid(q^2-1)$.由 $5||\mathrm{PSL}(2,q)|$得到 $q=5^f$.于是 PSL(2,q)有子群 PSL(2,5)非 5－闭,故 $f=1$.

$|{}^2A_2(q)|=\frac{1}{d}q^3(q^3+1)(q^2-1)$,$d=(3,q+1)$.因为由 $5|q^3+1$ 可得到 $5|q+1$,故当 $5||{}^2A_2(q)|$时,$5|q(q^2-1)$.因为${}^2A_2(q)$有子群同构于${}^2A_1(q)=A_1(q)$,故${}^2A_2(q)$非内－5－闭,G 不同构于${}^2A_2(q)$.

因为 A_5 非 5－闭,$A_5\not\leqslant A_n(n>5)$,故当 $G\cong A_n$ 时,$n=5$.

由[4],散在单群非内－5－闭,故 G 不为散在单群.

由单群分类定理,定理 2 的证明已完成.

参 考 文 献

[1] 陈重穆，内外—Σ群与极小非Σ群，西南师范大学出版社，1988.

[2] John, S. Rose, *A Course on Group Theroy*, Cambridge University Press, 1978, London.

[3] 张远达著，有限群构造，上、下册，科学出版社，1984.

[4] H. Conway, et al, *Atlas of Finite Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[5] Daniel Gorenstein, *Finite Simple Groups*, Plenumpress, New York and London, 1982.

[6] M. Aschbacher and L. Scott, *Maximal subgroups of finite groups*, J. Algebra 92(1985), 44—80.

[7] Martin R. Petter, *A note on finite groups having a fixed—point—free automorphism*, Proc. Amer. Math. Soc. , Vol. 52(1975).

[8] 李世荣，非正规极大子群同阶类类数=2的有限群，数学学报，Vol. 33, No. 3(1990), 388—392.

[9] 华罗庚,万哲先，典型群，上海科学技术出版社，1963.

[10] Elsa Fisman, *On the product of two finite solvable groups*, J. Algebra 80(1983), 517—536.

[11] Zvi Arad and Elsa Fisman, *On Finite Factorizable Groups*, J. Algebra 86(1984), 522—548.

[12] Michio Suzuki, *On a Class of doubly transitive groups*, Annals of Math. 75(1)(1962), 105—144.

[13] Martin W. Liebeck, *On the order of maximal subgroups of the finite classical groups*, Proc. London Math. Soc. , (3)50(1985), 426—446.

[14] 李世荣,李世余，非极大真子群为3—闭的有限群，数学学报，Vol. 29, No. 4(1986), 498—503.

Inner p-closed Groups and Their Generalization

Li Xianhua

(Dept. of Math., Guizhou Normal Univ., Guiyang)

Abstract

A non-p-closed group G is called quasi-p-closed if G has a proper subgroup H such that each of proper subgroup K of G not contained in H is p-closed. In this paper, we obtain the following theorems:

Theorem 1 *Let G be a qhasi-p-closed group.*

I. If G is solvable, then $2 \leq |\pi(G)| \leq 3$.

II. If G is non-solvable, then

a) $G/\phi(G)$ *is a non-abelian simple group.*

b) $G = N \times 1 \ \langle\alpha\rangle$, *where* $N/\phi(N)$ *is a non- abelian simple group.*

Theorem 2 *Inner-5-closed G has the following two types:*

I. Inner p-nilpotent groups of order $5^\alpha p^\beta$.

II. $G/\phi(G)$ *is isomorphic with* $PSL(2,5)$, *or* $Sz(5^q)$ *(where q is an odd prime).*