第14卷第2期　　数学研究与评论　　Vol. 14 No. 2
1994年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1994

关于奇异摄动问题的加权差分方法的注记*

俞 崇 庆
（内蒙古民族师范学院，通辽 028043）

摘　要　本文用例子说明文[1,2]中讨论的关于奇异摄动问题的加权差分格式不是一致收敛的，甚至是不相容的.

关键词　奇异摄动，差分格式，一致收敛.

一　引　言

考虑两点边值问题

$$\begin{cases} L_\varepsilon u \equiv -\varepsilon u''(x) + p(x)u'(x) = f(x) \quad (0 < x < 1), \\ u(0) = A, u(1) = B, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $0<\alpha<p(x)<\beta$，α,β 为常数，当 $\varepsilon=0$ 时方程(1.1)退化为

$$L_0 v \equiv p(x)v'(x) = f(x),$$

相应的定解条件为

$$v(0) = A.$$

退化问题在 $x=1$ 处失去一个边界条件，因而(1.1)的解 u 在 $x=1$ 处产生边界层.

由于边界层的出现，数值计算出现了许多困难，因而引起充分重视，例如在文[3]中讨论了很多方法，特别感兴趣的是一致收敛性差分格式.

在文[1]中对一阶导数 u' 引进了新的差分逼近

$$u_x = \frac{(1+\theta)(u_{i+1}-u_i)+(1-\theta)(u_i-u_{i-1})}{2h},$$

其中 θ 是非零参数.

文[1,2]指出，若参数 θ 满足下列条件

$$\frac{2\varepsilon}{p_i h} - \frac{2\varepsilon}{\alpha h} - 1 < \theta \leqslant \frac{2\varepsilon}{p_i h} - 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant N-1), \tag{1.2}$$

则有一族一致收敛的差分格式

$$L_h u_i \equiv -\varepsilon D_+ D_- u_i + p_i \frac{1+\theta}{2} D_+ u_i + p_i \frac{1-\theta}{2} D_- u_i = f_i. \tag{1.3}$$

若参数 θ 满足条件

$$\frac{2\varepsilon}{p_i h} - \mathrm{cth}\left(\frac{p_i h}{2\varepsilon}\right) \leqslant \theta \leqslant \frac{2\varepsilon}{p_i h} - 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant N-1) \tag{1.4}$$

---

* 1992年10月9日收到.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

时误差的界对一切 $\varepsilon>0$ 一致有效.

本注记将说明,满足上述条件的 θ,(1.3)将会出现不一致收敛,甚至于会出现不相容的情况.

二 几个例子

首先给出一致收敛的定义.

定义 设 $u(x)$是(1.1)的两点边值问题的解,u_i 是相应的差分格式的解,如果

$$|u(x_i)-u_i|\leqslant ch^p \quad (1\leqslant i\leqslant N-1),$$

其中 $p>0$,c 为常数,p,c 不依赖于 i,h,ε,则称该差分格式的解以 p 阶关于 ε 是一致收敛于两点边值问题的解,简称差分格式一致收敛.

要判断一个差分格式是否一致收敛,可利用一些充分条件[4],也可直接证明.要判断一个差分格式不是一致收敛的,则可验证其不满足一致收敛的必要条件.

考虑(1.1)的差分格式

$$\begin{cases} L_h^* u_i = -\varepsilon\sigma_i(\rho)D_+D_-u_i + p(x_i)D_0u_i = f(x_i) \quad (1\leqslant i\leqslant N-1), \\ u_0 = A, u_N = B, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\sigma_i(\rho)$为拟合因子,$\rho=\frac{h}{\varepsilon}$.

引理 1 假定差分格式(2.1)的解关于 ε 一致收敛到两点边值问题(1.1)的解,并设 n 为非负整数,使其固定,那么

$$\sigma_n(\rho)=\frac{1}{2}\rho p(0)\coth\left(\frac{1}{2}\rho p(0)\right)+\rho o(1), \quad 当\ h\to 0.$$

在差分格式(1.3)中取 $\theta=\frac{2\varepsilon}{p_ih}-\coth\left(\frac{p_ih}{2\varepsilon}\right)$,则差分格式化为

$$L_hu_i=-\varepsilon\frac{p_ih}{2\varepsilon}\coth\left(\frac{p_ih}{2\varepsilon}\right)D_+D_-u_i+p_iD_0u_i=f_i. \tag{2.2}$$

拟合因子为

$$\sigma_i(\rho)=\frac{1}{2}p_i\rho\coth\left(\frac{1}{2}p_i\rho\right).$$

对固定的正整数 n,有

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sigma_n(\rho)}{\rho}=\frac{1}{2}p(0)\coth\left(\frac{1}{2}\rho p(0)\right).$$

即差分格式(2.2)满足一致收敛的必要条件.事实上,差分格式(2.2)是一致收敛的.

例 1 在方程(1.1)中令 $p(x)=2$,取 $a=1$,参数 θ 的限制条件(1.2)化为

$$-\frac{\varepsilon}{h}-1<\theta\leqslant\frac{\varepsilon}{h}-1. \tag{2.3}$$

特别取

$$\theta=-1+\frac{2\varepsilon}{p_ih+2\varepsilon}=-1+\frac{\varepsilon}{h+\varepsilon},$$

显然这样 θ 满足(2.3).此时差分格式(1.3)化为

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$L_h u_i = -\varepsilon\left[\frac{h}{\varepsilon} + \frac{1}{1+\frac{h}{\varepsilon}}\right]D_+D_-u_i + 2D_0u_i = f_i. \tag{2.4}$$

这就是著名的 Самарскии 格式. (2.4)的拟合因子可以写为

$$\sigma_i(\rho) = \rho + \frac{1}{1+\rho},$$

显然不满足引理 1 所述必要条件,从而得出差分格式(2.4)不一致收敛. 文[4]也提到了这个结论.

例 2 设 $p(x)=1$. 考虑参数 θ 的限制条件(1.4). 此时化为

$$\frac{2}{\rho} - \coth\left(\frac{\rho}{2}\right) \leqslant \theta \leqslant \frac{2}{\rho} - 1,$$

其中 $\rho=\frac{h}{\varepsilon}$,

$$\frac{2}{\rho} - \coth\left(\frac{\rho}{2}\right) = \frac{2}{\rho} - 1 - \frac{2}{e^\rho - 1}.$$

注意到 $e^\rho - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!}$, 取 η 为大于零的小数,则存在 $M>0$ 使

$$\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!} < \eta.$$

由此可得

$$\frac{2}{\rho} - \coth\left(\frac{\rho}{2}\right) < \frac{2}{\rho} - 1 - \frac{2}{\left(\sum_{n=1}^{M}\frac{\rho^n}{n!}\right) + \eta}.$$

取

$$\theta = \frac{2}{\rho} - 1 - \frac{2}{\left(\sum_{n=1}^{M}\frac{\rho^n}{n!}\right) + \eta}.$$

显然 θ 满足条件(1.4).

利用恒等式

$$D_+u_i = D_0u_i + \frac{h}{2}D_+D_-u_i,$$

$$D_-u_i = D_0u_i - \frac{h}{2}D_+D_-u_i,$$

把 D_+u_i, D_-u_i 代入差分格式(1.3)有

$$L_h u_i = \left(-\varepsilon + \frac{\theta}{2}p_i h\right)D_+D_-u_i + p_iD_0u_i = f_i. \tag{1.3)'$$

用 θ 及 $p(x)=1$ 代入有

$$L_h u_i = -\varepsilon\left(1 + \frac{\rho}{2}\left[\frac{2}{\rho} - 1 - \frac{2}{\left(\sum_{n=1}^{M}\frac{\rho^n}{n!}\right) + \eta}\right]\right)D_+D_-u_i + D_0u_i = f_i.$$

此格式的拟合因子为

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\sigma_i(\rho) = 1 + \frac{\rho}{2}\left[\frac{2}{\rho} - 1 - \frac{2}{\left(\sum_{n=1}^{M} \frac{\rho^n}{n!}\right) + \eta}\right].$$

由此看出，不满足一致收敛的必要条件.

例 3 取 $\theta=\frac{2\varepsilon}{p_i h}-1$，此时 θ 满足条件(1.2)和(1.4). 把这个 θ 代入差分格式(1.3)有

$$L_h u_i = p_i D_- u_i = f_i.$$

显然，这个差分格式与微分方程(1.1)不相容.

上述三个例子说明，对于不同范围的 θ 取值、差分格式都不一致收敛. 从而说明文[1,2]中的结论是欠妥的. 由一致收敛差分格式的必要条件知，一致收敛的差分格式的系数中应含有指数.

参 考 文 献

[1] 吴启光，奇异摄动问题的加权差分方法，应用数学和力学，5，5(1984)，633—638.

[2] 吴启光，奇异摄动问题的一致收敛差分格式，应用数学和力学，6，5(1985)，389—394.

[3] E. P. Doolan and J. J. H. Miller and W. H. A. Schilders, *Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers*, Dublin: Boole Press, 1980.

[4] P. A. Farrell, *Sufficient conditions for uniform convergence of a class of difference schemes for a singularly perturbed problem*, IMA J. Numer. Anal., 7(1987), 459—472.

A Note on Weighted Difference Method for a Singular Perturbation Problem

Yu Chongqing

(Inner Mongolia National Teacher's College, Tongliao)

Abstract

By some examples we explain that the weighted difference schemes for a singular perturbation problem discussed in [1,2] are not uniformly convergent and even they are not consistent.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.