线性泛函微分方程的一种渐近积分*

邓　飞　其
（东北重型机械学院，齐齐哈尔 161042）

摘　要　本文研究一类线性泛函微分方程的渐近积分，在一系列条件下得到了渐近积分表达式．文中的引理2，$n=1$时定理1.2的结果分别改进了[1]中主要定理，$n=1$时的Haddock & Sacker猜想．

关键词　泛函微分方程，渐近积分．

研究解的渐近性质是泛函微分方程理论的重要内容．在这方面，J. R. Haddock等人取得了丰富的成果，他们建立了一系列解的收敛性准则．在文[1]中，J. R. Haddock与R. J. Sacker提出了关于线性时滞方程渐近积分的一个猜想．

猜想（Haddock & Sacker, 1980）：　设$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$\lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j)$．如果$A(\cdot)$、$B(\cdot)\in L^2[0,\infty)$，那么存在矩阵函数$F(t)$，$F(t)\to 0(t\to+\infty)$，使对

$$\dot{x}(t)=[\Lambda+A(t)]x(t)+B(t)x(t-r) \tag{1}$$

的任一解$x(t)$，有常数c和向量$f(t)$，$f(t)\to 0(t\to+\infty)$使

$$x(t)=[I+F(t)]\exp(\int_0^t[\Lambda+\mathrm{diag}(A(s))+\mathrm{diag}(B(s))e^{-r\Lambda}]ds)(c+f(t)). \tag{2}$$

反之，对任何常数c，存在(1)的解$x(t)$，具有形式(2)，其中$f(t)\to 0(t\to+\infty)$．

在[1]中，Haddock与Sacker在R^1中证实了这个猜想．O. Arino与I. Györi在[2]中研究了这个猜想，得到了一个类似于该猜想的结果．本文讨论R^n中的一般线性泛函微分方程

$$\dot{x}(t)=\Lambda x(t)+\int_{-r}^0[d_\theta\eta(t,\theta)]x(t+\theta), \tag{3}$$

$$\dot{x}(t)=\int_{-r}^0[d_\theta\eta(t,\theta)]x(t+\theta), \tag{4}$$

其中Λ为常数阵（不必为对角阵），$r=\mathrm{const.}>0$，$\eta(t,\cdot)$为$[-r,0]$上的有界变差函数．我们得到一个类似于(2)的渐近表达式，即得到一个类似于Haddock & Sacker猜想的结果．

先引入三个引理．引理1参考[1]，引理2是作者对[1]中主要结果的改进，引理3的证明是简单的，略去．

引理1　如果$p>0$，$q(\cdot)\in L^p[0,\infty)$，则

$$\exp(\int_{t-r}^t q(s)ds)-1\in L^p[0,\infty).$$

引理2　设$C=C([-r,0],R^n)$，$L(t,\varphi)\in C(R\times C,R^n)$，$L(t,\varphi)$关于$\varphi$线性，$\|L(t,\varphi)\|\leqslant$

* 1991年9月10日收到．

$\mu(t)|\varphi|$,有自然数 p 使 $\int_{-r}^{0}\|d_\theta\eta(t,\theta)\| \in L^p[0,\infty),\mu(t)\in L^{p/j}[0,\infty),j=1,2,\cdots,p$,则当 $t\to+\infty$时方程

$$\dot{x}(t)=\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(t,\theta)][x(t)-x(t+\theta)]+L(t,x_t) \tag{5}$$

之每一解趋于常向量且零解一致稳定.

证明 用 $k(t)$表示全变差 $\int_{-r}^{0}\|d_\theta\eta(t,\theta)\|$,同时考虑

$$\dot{x}(t)=\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(t,\theta)][x(t)-x(t+\theta)]. \tag{6}$$

A. 先证(5)之零解一致稳定. 将这一部分的主要断言标为(a)(b)(c)(d)(e). 因为 $\mu(\cdot)\in L^1[0,\infty)$,所以由熟知的线性系统扰动定理知:

(a) 若(6)之零解一致稳定,则(5)亦然.

所以只须证(6)之零解一致稳定. 由于 $k(\cdot)\in L^p[0,\infty)$,所以由[1]中引理 2.1, $\int_{t-r}^{t}k(s)ds\to 0(t\to+\infty)$,所以有:

(b) $\int_{t-r}^{t}k(s)ds$ 有界:设 $\int_{t-r}^{t}k(s)ds\leqslant M,t\geqslant r$;

(c) 有常数 $T_1>0$ 使当 $t\geqslant T_1$ 时 $\int_{t-r}^{t}k(s)ds<\frac{1}{2}$.

记 $\delta_0=\min[1,e^{-2M}]/4$. 设 $\sigma\in R^+,\varphi\in C,|\varphi|<\delta_0,x(t)=x(t,\sigma,\varphi)$为(6)之过$(\sigma,\varphi)$之解. 由(6),当 $t\geqslant\sigma$ 时

$$\|\dot{x}(t)\|\leqslant\int_{-r}^{0}\|d_\theta\eta(t,\theta)\|[\|x(t)\|+\|x(t+\theta)\|]\leqslant 2k(t)|x_t|,$$

$$\|x(t)\|\leqslant\delta_0+2\int_{\sigma}^{t}k(s)|x_s|ds.$$

引入辅助函数

$$v(t)=\begin{cases}\delta_0,\ \sigma-r\leqslant t\leqslant\sigma,\\ \delta_0+2\int_{\sigma}^{t}k(s)|x_s|ds,\ t>\sigma.\end{cases} \tag{7}$$

易知 $v(t)$是$[\sigma-r,\infty)$上的单调不减非负连续函数,且 $\|x(t)\|\leqslant v(t),\sigma-r\leqslant t<\infty$, $|x_t|\leqslant v(t),t\geqslant\sigma$. 所以由(7),

$$v(t)\leqslant\delta_0+2\int_{\sigma}^{t}k(s)v(s)ds,\ t\geqslant\sigma.$$

再由 Gronwall—Bellman 不等式定理,

$$v(t)\leqslant\delta_0\exp(2\int_{\sigma}^{t}k(s)ds),\ t\geqslant\sigma.$$

于是当 $\sigma\leqslant t\leqslant\sigma+r$ 时

$$v(t)\leqslant\delta_0\exp(2\int_{\sigma}^{\sigma+r}k(s)ds)\leqslant\frac{1}{4}.$$

所以$\forall\ \theta\in[-r,0]$, $\|x(t)\|\leqslant v(t)\leqslant\frac{1}{4}$, $\|x(t+\theta)\|\leqslant v(t)\leqslant\frac{1}{4}$,从而

$$\|x(t)-x(t+\theta)\|\leqslant\frac{1}{2}<1,\ \theta\in[-r,0],\ t\in[\sigma,\sigma+r],. \tag{8}$$

下面证明：对 $\sigma\geqslant T_1$ 的情形．对 $t\in[\sigma,+\infty)$，(8)亦成立．反设结论不真．记 $T_2=\inf\{t\mid \|x(t)-x(t+\theta)\|<1$ 不成立，$t\geqslant\sigma,\theta\in[-r,0]\}$．由上面分析知 $T_2\geqslant\sigma+r$，且 $\|x(t)-x(t+\theta)\|<1$，$\sigma\leqslant t<T_2,\theta\in[-r,0]$，$\sup_{\theta\in[-r,0]}\|x(T_2)-x(T_2+\theta)\|=1$．据此有

$$\|x(T_2)-x(T_2+\theta)\|\leqslant\int_{T_2-r}^{T_2}\|\dot{x}(s)\|ds\leqslant\int_{T_2-r}^{T_2}\int_{-r}^{0}\|d_\theta\eta(s,\theta)\|\ \|x(s)-x(s+\theta)\|ds$$

$$\leqslant\int_{T_2-r}^{T_2}k(s)ds<\frac{1}{2}.$$

由此式导出 $1\leqslant\frac{1}{2}$，不可能！所以有

(d) 若 $\sigma\geqslant T_1$，$|\varphi|<\delta_0$，则

$$\|x(t)-x(t+\theta)\|<1,\ \forall\ t\in[\sigma,\infty),\theta\in[-r,0]. \tag{9}$$

$\forall\ \varepsilon>0$，令 $\delta=\min[\delta_0,\varepsilon/3]$．由[1，Lemma2.1，2.2]易推知：

$$k(t)\int_{t-r}^{t}k(s_1)\int_{s_1-r}^{s_1}\cdots\int_{s_{p-2}-r}^{s_p}k(s_{p-1})ds_{p-1}\cdots ds_2ds_1\in L^1[pr,\infty).$$

所以可取 $T=T(\varepsilon)\geqslant\max[T_1+r,pr]$，使当 $\sigma\geqslant T$ 时，

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{\sigma}^{\sigma+pr}k(s)ds<\frac{\varepsilon}{3},\\ \displaystyle\int_{\sigma+pr}^{\infty}k(s)\int_{s-r}^{s}k(s_1)\int_{s_1-r}^{s_1}\cdots\int_{s_{p-2}-r}^{s_{p-2}}k(s_{p-1})ds_{p-1}\cdots ds_1ds<\frac{\varepsilon}{3}.\end{cases} \tag{10}$$

我们断言：

(e) 若 $\sigma\geqslant T$，$|\varphi|<\delta$，则 $\forall\ t\geqslant\sigma$，$\|x(t,\sigma,\varphi)\|<\varepsilon$．

注意到 $T\geqslant T_1,\delta\leqslant\delta_0$，若 $t\in[\sigma,\sigma+pr]$，则

$$\|x(t,\sigma,\varphi)\|\leqslant\|x(\sigma,\sigma,\varphi)\|+\int_{\sigma}^{t}\int_{-r}^{0}\|d_\theta\eta(s,\theta)\|\ \|x(s)-x(s+\theta)\|ds$$

$$\leqslant\|\varphi(0)\|+\int_{\sigma}^{t}\int_{-r}^{0}\|d_\theta\eta(s,\theta)\|ds$$

$$\leqslant|\varphi|+\int_{\sigma}^{\sigma+pr}k(s)ds<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon;$$

若 $t\in[\sigma+pr,\infty)$，则由(10)可推出

$$\|x(t,\sigma,\varphi)\|\leqslant\|x(\sigma+pr,\sigma,\varphi)\|+\int_{\sigma+pr}^{t}\|\dot{x}(s,\sigma,\varphi)\|ds\leqslant\|x(\sigma+pr,\sigma,\varphi)\|$$

$$+\int_{\sigma+pr}^{\infty}k(s)\int_{s-r}^{s}k(s_1)\int_{s_1-r}^{s_1}\cdots\int_{s_{p-2}-r}^{s_{p-2}}\int_{-r}^{0}\|d_\theta\eta(s_{p-1},\theta)\|$$

$$\cdot\|x(s_{p-1})-x(s_{p-1}+\theta)\|ds_{p-1}\cdots ds_1ds<\cdots<\varepsilon$$

所以(e)为真．仿(d)中证明 $\|x(t)\|\leqslant v(t)\leqslant1/4$ 的方法可证：对上述 δ，有 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ $(0<\delta_1<\delta)$，使 $\forall\ \sigma\in[0,T]$，$\varphi\in C$，只要 $|\varphi|<\delta_1$，便有 $\|x(t,\sigma,\varphi)\|<\delta(\leqslant\varepsilon/3<\varepsilon)$，于是由(e)之结论，对 $t\geqslant T$，亦有 $\|x(t,\sigma,\varphi)\|=\|x(t,T,x_T(\sigma,\varphi)\|<\varepsilon$，即 $\forall\ t\in[\sigma-r,\infty)$，均有 $\|x(t,\sigma,\varphi)\|<\varepsilon$．

以上分析表明：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$，使 $\forall\ \sigma\in R^+$，$\varphi\in C$，当 $|\varphi|<\delta$ 时 $\|x(t,\sigma,\varphi)\|<\varepsilon$，$t\in[\sigma-r,\infty)$，所以(6)从而(5)之零解一致稳定．

B. 下证：$t\to+\infty$ 时(5)之每一解趋于常向量．

首先，由(5)零解之一致稳定性，(5)之任一解有界．设 $x(t)$ 为(5)之解，$\|x(t)\|\leqslant m$，由[1，

Lemma 2.4],若能证明 $\|\dot{x}(t)\| \in L^1[0,\infty)$,则结论成立. 由 $\|x(t)\| \leqslant m$ 有 $|x_t| \leqslant m$,所以由(5)有

$$\begin{aligned}\|\dot{x}(t)\| &\leqslant \int_{-r}^{0} \|d_\theta \eta(t,\theta)\| \, \|x(t) - x(t+\theta)\| + m\mu(t) \\ &= \int_{-r}^{0} \left\| \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}(s_1) ds_1 \right\| \, \|d_\theta \eta(t,\theta)\| + m\mu(t) \\ &\leqslant k(t) \int_{t-r}^{t} \|\dot{x}(s_1)\| ds_1 + m\mu(t) \\ &\leqslant k(t) \int_{t-r}^{t} [k(s_1) \int_{s_1-r}^{s_1} \|\dot{x}(s_2)\| ds_2 + m\mu(s_1)] ds_1 + m\mu(t)\end{aligned}$$

…,反复利用该不等式,至右端出现 $p-1$ 重积分,利用关于 $k(\cdot)$,$\mu(\cdot)$的可积性条件与[1, Lemma 2.1,2.2]易推得 $\|\dot{x}(t)\| \in L^1[pr,\infty)$,从而 $\|\dot{x}(t)\| \in L^1[0,\infty)$,$x(t)$收敛于常向量($t \to +\infty$时). 引理 2 证毕.

引理 3 如果 $\Lambda\eta(t,\theta) = \eta(t,\theta)\Lambda$,则方程(3)之任一解 $x(t)$ 可表成

$$x(t) = \exp\left(\int_0^t [\Lambda + \int_{-r}^{0} [d_\theta \eta(s,\theta)] e^{\theta\Lambda}] ds\right) y(t), \tag{11}$$

其中 $y(t)$满足方程

$$\dot{y}(t) = -\int_{-r}^{0} [d_\theta \eta(t,\theta)] e^{\theta\Lambda} [y(t) - y(t+\theta)] + \int_{-r}^{0} [d_\theta \eta(t,\theta)] e^{\theta\Lambda} D(t,\theta) y(t+\theta), \tag{12}$$

$$D(t,\theta) = \exp\left(-\int_{t+\theta}^{t} \int_{-r}^{0} [d_\sigma \eta(s,\sigma)] e^{\sigma\Lambda} ds\right) - I.$$

注 1 $\Lambda = 0$,$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda,\cdots\lambda)$或 $n=1$ 时均有 $\Lambda\eta = \eta\Lambda$.

定理 1 如果 $\Lambda\eta = \eta\Lambda$,$\int_{-r}^{0} \|d_\theta \eta(t,\theta)\| \in L^p[0,\infty)$,$\int_{-r}^{0} \|d_\theta \eta(t,\theta)\| \, \|D(t,\theta)\| \in L^{p/j}[0,\infty)$,$j = 1,2,\cdots,p$,$p$ 为某一自然数,则(3)之任一解 $x(t)$可表为

$$x(t) = e^{\int_0^t [\Lambda + \int_{-r}^{0} [d_\theta \eta(s,\theta)] e^{\theta\Lambda}] ds} (c + z(t)), \tag{13}$$

其中 $c, z(t) \in R^n$,$z(t) \to 0 (t \to +\infty)$;另外,至少存在某 $c \neq 0$ 及 $z(t) \in R^n$,$z(t) \to 0 (t \to +\infty)$,使(13)成为(3)之解.

证明 设 $x(t)$为(3)之任一解,$y(t)$由(11)确定. 因 $e^{\theta\Lambda}$ 有界,由引理 2,在定理条件下,当 $t \to +\infty$时 $y(t) \to c = \mathrm{const}$. ,令 $z(t) = y(t) - c$,则 $y(t) = c + z(t)$,$z(t) \to 0 (t \to +\infty)$. 将此代入(11)即得(13).

另外,设将(3)的解表为(13)时($z(t) \to 0, t \to +\infty$),恒有 $c = 0$. 则(3)之零解全局吸引. 由引理 2,(3)之零解渐近稳定. 由线性系统的扰动理论[3],

$$\dot{y}(t) = \int_{-r}^{0} [d_\theta \eta(t,\theta)] e^{\theta\Lambda} [y(t) - y(t+\theta)] \tag{14}$$

之零解亦渐近稳定,因 $\int_{-r}^{0} [d_\theta \eta(t,\theta)] e^{\theta\Lambda} \in L^1[0,\infty)$,但这是不可能的,因为任一非零常向量均为(14)之解. 所以将(3)之解表为(13)时,至少有某 $c \neq 0$. 证毕.

定理 2 如果 $\int_{-r}^{0} \|d_\theta \eta(t,\theta)\| \in L^2[0,\infty)$,$\Lambda\eta = \eta\Lambda$,则定理 1 之结论成立.

证明 只须证 $\int_{-r}^{0} \|d_\theta \eta(t,\theta)\| \, \|D(t,\theta)\| \in L^{1,2}[0,\infty)$. 令

$$d(t)=\exp\left[\int_{t-r}^{t}\int_{-r}^{0}\|d_\theta\eta(s,\theta)\|ds\right].$$

由于对任何方阵 A，$\|e^A-I\|\leqslant e^{|A|}-1$，所以有 $\|D(t,\theta)\|\leqslant d(t)-1$.

由引理 1，$d(t)-1\in L^2[0,\infty)$，所以由

$$\int_{-r}^{0}\|d_\theta\eta(t,\theta)\|\ \|D(t,\theta)\|\leqslant\left(\int_{-r}^{0}\|d_\theta\eta(t,\theta)\|\right)(d(t)-1)$$

知 $\int_{-r}^{0}\|d_\theta\eta(t,\theta)\|\ \|D(t,\theta)\|\in L^1[0,\infty)$. 由[1, Lemma 2.1]，$\|D(t,\theta)\|\leqslant d(t)-1\to 0^+(t\to+\infty)$，所以 $\|D(t,\theta)\|$ 有界，又有 $\int_{-r}^{0}\|d_\theta\eta(t,\theta)\|\ \|D(t,\theta)\|\in L^2[0,\infty)$. 证毕.

定理 3 如果 $\int_{-r}^{0}\|d_\theta\eta(t,\theta)\|\in L^1[0,\infty)\cup L^2[0,\infty)$，则(4)之解可表成

$$x(t)=e^{\int_0^t\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(t,\theta)]ds}(c+(z(t)),\tag{15}$$

其中 $z(t)\to 0(t\to+\infty)$，且至少有某解对应的 $c\neq 0$.

证明 $\int_{-r}^{0}\|d_\theta\eta(t,\theta)\|\in L^2[0,\infty)$ 时，由定理 2 即知结论成立；$\int_{-r}^{0}\|d_\theta\eta(t,\theta)\|\in L^1[0,\infty)$ 时，(4)之零解一致稳定，从而其解有界. 设 $\|x(t)\|\leqslant m$，则由(4)，

$$\|\dot{x}(t)\|\leqslant m\int_{-r}^{0}\|d_\theta\eta(t,\theta)\|,$$

所以 $\dot{x}\in L^1[0,\infty)$，于是易证：$t\to+\infty$时 $x(t)\to c_1=\text{const}$. 令 $c=\exp\left(-\int_0^\infty\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(t,\theta)]ds\right)c_1$，易证，对此 c，(15)成立. 另外，类似定理 1 之证明可得：至少有某解对应的 $c\neq 0$. 证毕.

推论 1 若 $0\leqslant r_i(t)\leqslant r=\text{const.}\ (r>0)$，$A_1(t),\cdots,A_m(t)\in L^1[0,\infty)$，或 $A_1(t),\cdots,A_m(t)\in L^2[0,\infty)$，则时滞方程

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{m}A_i(t)x(t-r_i(t))\tag{16}$$

之解可以表为

$$x(t)=e^{\int_0^t[\sum_{i=1}^{m}A_i(s)]ds}(c+z(t)),\tag{17}$$

其中 $z(t)\to 0(t\to+\infty)$，且至少有某解对应的 $c\neq 0$.

注 2 由定理 3 与推论 1，若(4)、(16)之系数为 L^1 可积的，则其零解一定非渐近稳定.

从定理 1 出发，还可推出一系列类似于定理 2.3 的结果，例如

定理 4 如果 $A\eta=\eta A$，对某自然数 p，$\int_{-r}^{0}\|d_\theta\eta(t,\theta)\|\in L^p[0,\infty)$，则方程

$$\dot{x}=\left[A+\int_{-r}^{0}d_\theta\eta(t,\theta)\right]x(t)-\int_{-r}^{0}[d_\theta\eta(t,\theta)]e^{-\theta A}x(t+\theta)\tag{18}$$

之解可以表为

$$x(t)=e^{At}(c+z(t)),\tag{19}$$

其中 $z(t)\to 0(t\to+\infty)$，且至少有一解对应的 $c\neq 0$.

注 3 在推论 1 条件下，常微分方程

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{m}A_i(t)x(t)\tag{20}$$

之解亦可表为(17). 据此可以认为：本文建立了泛函微分方程与经典常微分方程之间的一种渐

近比较关系.

注 4 当 $n=1$ 时易证(参考[1]):在诸定理条件下,$\forall c \in R$,均有 $z(t)$ ($z(t)\to 0, t\to +\infty$)使(13)、(15)、(17)、(19)分别成为(3)、(4)、(16)、(18)之解.

注 5 $n=1$ 时,本文定理 1、2 改进了 Haddock & Sacker 猜想的结论.

参 考 文 献

[1] J. R. Haddock and R. J. Sacker, J. Math. Anal. Appl., 76(1980), 328—338.

[2] O. Arino and I. Györi, J. Math. Anal. Appl., 138(1989), 311—327.

[3] J. K. Hale, *Functional Differential Equations*, Springer—Verlag, New York, 1971.

A Type of Asymptotic Integration for Linear Functional Differential Equations

Deng Feiqi

(Northeast Institute of Heavy Machinery)

Abstract

In this paper, we investigate a type of asymptotic integration of the form

$$X(t) = e^{\int_0^t [\Lambda + \int_{-r}^0 [d_\theta \eta(s,\theta)] e^{\theta\Lambda}] ds} (C + Z(t))$$

for linear functional differential equation

$$\dot{X}(t) = \Lambda X(t) + \int_{-r}^{0} [d_\theta \eta(t,\theta)] X(t+\theta).$$

The problem we deal with is similar to Haddock and Sacker's conjecture. It is shown that our results coincide this conjecture's conclusion in R^1.