复分块阵的正定性及 $AX=b$ 的反问题求解*

陈福元
(福建省龙岩师专数学系,364000)

设 $C_{n\times m}$ 和 C^n 分别是 $n\times m$ 复阵集和 n 维复列向量集. $A>0$ 表示 A 是埃尔米特正定阵. A^*、A^T 和 $\overline{A}$ 分别是 $A\in C_{n\times m}$ 的共轭转置阵、转置阵和共轭阵. $\mathrm{Re}z$ 和 $|z|$ 分别是复数 z 的实部和模.

定义 设 $A\in C_{n\times n}$. 若对 $\forall\ 0\neq X\in C^n$, 恒有

$$\mathrm{Re}(X^*AX)>0.$$

则称 A 复正定.

定理1 设复分块阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}\in C_{n\times n},\tag{1}$$

其中 $A_1\in C_{k\times k}$、$A_2\in C_{k\times(n-k)}$、$A_3\in C_{(n-k)\times k}$、$A_4\in C_{(n-k)\times(n-k)}$, $1\leqslant k<n$. 则 A 复正定的必要条件是

$$A_1 \text{ 及 } A_4-\frac{1}{4\mu}(A_2^*+A_3)(A_2+A_3^*)\tag{2}$$

均复正定,其中 μ 是 $H_1=\frac{1}{2}(A_1+A_1^*)$ 的最大特征值;而 A 复正定的充分条件是

$$A_1 \text{ 及 } A_4-\frac{1}{4\lambda}(A_2^*+A_3)(A_2+A_3^*)\tag{3}$$

均复正定,其中 λ 是 H_1 的最小特征值.

定理1′ 设复分块阵为(1). 则 A 复正定的必要条件是

$$A_4 \text{ 及 } A_1-\frac{1}{4\xi}(A_2+A_3^*)(A_2^*+A_3)\tag{2′}$$

均复正定,其中 ξ 是 $H_2=\frac{1}{2}(A_4+A_4^*)$ 的最大特征值;而 A 复正定的充分条件是

$$A_4 \text{ 及 } A_1-\frac{1}{4\zeta}(A_2+A_3^*)(A_2^*+A_3)\tag{3′}$$

均复正定,其中 ζ 是 H_2 的最小特征值.

推论1.1 设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \alpha\\ \beta & A_4\end{pmatrix}\in C_{n\times n},\tag{4}$$

其中 $\alpha^T\in C^{n-1}$, $\beta\in C^{n-1}$, $A_4\in C_{(n-1)\times(n-1)}$. 则 A 复正定的充要条件是

* 1990年9月2日收到. 93年12月12日收到修改稿.

$$\mathrm{Re}(a_{11}) > 0 \text{ 且 } A_4 - \frac{1}{4\mathrm{Re}(a_{11})}(\alpha^* + \beta)(\alpha + \beta^*) \text{ 复正定}. \tag{5}$$

注 推论 1.1 是[1]的主要结果在复阵中的推广.

推论 1.2 设复分块阵为(1). 则 $A>0$ 的必要条件是

$$A_1 > 0 \text{ 且 } A_4 - \frac{1}{\mu_1}A_2^* A_2 > 0; \tag{6}$$

而 $A>0$ 的充分条件是

$$A_1 > 0, A_2 = A_3^*, A_4 - \frac{1}{\lambda_1}A_2^* A_2 > 0, \tag{7}$$

其中 μ_1 和 λ_1 分别是 A_1 的最大和最小特征值.

推论 1.3 设复分块阵为(4). 若 $A=A^*$, 则 $A>0$ 的充要条件是

$$a_{11} > 0 \text{ 且 } A_4 - \frac{1}{a_{11}}\alpha^* \alpha > 0. \tag{8}$$

现利用上述结果, 将[1], [2]所提出的 $AX=b$ 的反问题推广到复正定阵类中求解.

定理 2 设 $0 \neq X \in C^n$, $0 \neq b \in C^n$. 则

$$AX = b \tag{9}$$

的反问题在复正定阵类中有解的充要条件是 $\mathrm{Re}(X^* b) > 0$, 且解的一般形式为

$$A = P^* \hat{A} P, \tag{10}$$

其中 $P \in C_{n\times n}$ 非奇异, 使

$$\begin{cases} PX = (1, 0, \cdots, 0)^T \in C^n, \\ (P^{-1})^* b = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \cdots, \hat{b}_n)^T \in C^n, \end{cases} \tag{11}$$

而

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 & \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} & \hat{A}_4 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

其中 $\hat{\alpha} \in C^{n-1}$ 是任意的, $\hat{\beta} = (\hat{b}_2, \cdots, \hat{b}_n)^T \in C^{n-1}$,

$$\hat{A}_4 = B + \frac{1}{4\mathrm{Re}(\hat{b}_1)}(\hat{\beta} + \hat{\alpha}^*)(\hat{\beta}^* + \hat{\alpha}), \tag{13}$$

而 $B \in C_{(n-1)\times(n-1)}$ 是任意的复正定阵.

推论 2.1 $AX=b$ 的反问题在埃尔米特正定阵类中有解的充要条件是 $X^* b > 0$.

参 考 文 献

[1] 郭忠, 矩阵正定性的判定及线性方程组 $AX = b$ 的反问题求解, 科学通报, 32(1987), 2: 95—98.

[2] 李森林, 几类直接控制系统绝对稳定的充分与必要条件, 科学通报, 27(1982), 10: 581—582.