第14卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 14 No. 3
1994年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1994

无穷维 Banach 空间上的逼近定理和弱内向映象的不动点定理*

刘　立　山

(曲阜师范大学数学系，山东 273165)

摘　要　本文在适当的边界条件下证明了 Ky Fan[1, Th. 2]逼近定理对严格集压缩映象和凝聚映象在无穷维 Banach 空间中的圆环上也成立. 作为应用，得到了弱内向映象的非零不动点定理.

关键词　逼近定理，不动点定理，无穷维 Banach 空间.

Ky. Fan 在[1]中证明了如下一个非常重要的逼近定理：

设 K 是线性赋范空间 E 的一个非空紧凸子集，则对任何连续映象 $f:K\to E$，存在 $u\in K$，使得 $\|u-fu\|=d(f(u),K)$.

许多作者对这个定理的各种形式进行了研究，得到了一些新的不动点定理(参见[2]—[6]). 本文利用孙经先[7,8]的结果，在适当的边界条件下证明了以上逼近定理对 k-集压缩映象 $(0\leqslant k<1)$ 和凝聚映象在无穷维 Banach 空间的圆环上也成立. 作为应用，我们得到了一些新的不动点定理，特别得到了弱内向映象的非零不动点定理，推广了一些已知的结果.

本文假设 X 是无穷维 Banach 空间，$D\subset X$，$\overline{D}$ 和 ∂D 分别表示 D 的闭包和边界. 让 $0<r<R$，

$$B_r=\{x\mid x\in X,\ \|x\|<r\},\qquad B_R=\{x\mid x\in X,\ \|x\|<R\}.$$

定理 1　设 $A:\overline{B}_R\to X$ 是 k-集压缩映象 $(0\leqslant k<1)$. 若任给 $x\in\partial B_r$，有 $\|Ax\|\geqslant\|x\|$，则存在 $u\in\overline{B}_R\backslash B_r$，使得

$$\|u-Au\|=d(Au,\overline{B}_R)=d(Au,\overline{B}_R\backslash B_r).$$

证明　定义映象 $H:X\to\overline{B}_R$ 如下：

$$Hx=\begin{cases}x, & \text{当 } \|x\|\leqslant R \text{ 时},\\ \dfrac{Rx}{\|x\|}, & \text{当 } \|x\|\geqslant R \text{ 时},\end{cases}$$

则由[9]中推论 1 知 H 是 1—集压缩映象，从而 $Fx=H(Ax):\overline{B}_R\to\overline{B}_R$ 是 k-集压缩映象. 下面我们证明：

$$x\in\partial B_R\Rightarrow\|Fx\|\leqslant\|x\|,\quad x\in\partial B_r\Rightarrow\|Fx\|\geqslant\|x\|.\tag{1}$$

当 $x\in\partial B_R$ 时，则从 $Fx\in\overline{B}_R$ 即得 $\|Fx\|\leqslant R=\|x\|$.

* 1991年11月4日收到.

当 $x\in\partial B_r$ 时，我们分两种情况考虑：

1° 若 $r\leqslant\|Ax\|\leqslant R$，则由 H 的定义可知 $H(Ax)=Ax$，从而

$$\|Fx\| = \|H(Ax)\| = \|Ax\| \geqslant \|x\|.$$

2° 若 $\|Ax\|>R$，则由 $H(Ax)=\dfrac{RAx}{\|Ax\|}$ 即知 $\|Fx\|=\|H(Ax)\|=R>r=\|x\|$.

故(1)成立. 由[7]中定理2可知，存在 $u\in\overline{B}_R\backslash B_r$ 使得 $Fu=u$，从而我们有

$$\|Au-u\| = \|Au-H(Au)\| = \begin{cases}\|Au-Au\| = 0, & \text{当 } \|Au\|\leqslant R \text{ 时},\\ \left\|Au-\dfrac{RAu}{\|Au\|}\right\| = \|Au\|-R, & \text{当 } \|Au\|\geqslant R \text{ 时},\end{cases}$$

又任给 $x\in\overline{B}_R\backslash B_r$，(或 $x\in\overline{B}_R$)，有

$$\|Au\|-R\leqslant\|Au\|-\|x\|\leqslant\|Au-x\|,$$

故对任给 $x\in\overline{B}_R\backslash R_r$(或 $x\in\overline{B}_R$)，有 $\|Au-u\|\leqslant\|Au-x\|$，所以

$$\|Au-u\| = d(Au,\overline{B}_R\backslash B_r) = d(Au,\overline{B}_R).$$

定理2 设 $A:\overline{B}_R\to X$ 是 k-集压缩映象($0\leqslant k<1$)，且任给 $x\in\partial B_r$，有 $\|Ax\|\geqslant\|x\|$，若 A 在外边界 ∂B_R 上满足下列条件之一：

1) 对每一个 $x\in\partial B_R$ 且 $Ax\neq x$，存在 $y\in I_{\overline{B}_R}(x)$，使得 $\|y-Ax\|<\|x-Ax\|$，其中 $I_{\overline{B}_R}(x)=\{x+a(v-x)\mid v\in\overline{B}_R,a>0\}$；

2) $A:\overline{B}_R\to X$ 是弱内向映象，即对任给 $x\in\partial B_R$，有 $Ax\in\overline{I_{\overline{B}_R(x)}}$；

3) 对任意的 $x\in\partial B_R$，有 $\|Ax-x\|\neq\|Ax\|-\|x\|$；

4) 存在 $\alpha>1$，使得对任给 $x\in\partial B_R$，有 $\|Ax\|^{\alpha}-\|x\|^{\alpha}\leqslant\|Ax-x\|^{\alpha}$；

5) 存在 $0<\beta<1$，使得对任给 $x\in\partial B_R$，有 $\|Ax\|^{\beta}-\|x\|^{\beta}\geqslant\|Ax-x\|^{\beta}$；

6) 对任意的 $x\in\partial B_R$ 和 $\lambda\in(0,1)$，有 $x\neq\lambda Ax$.

则 A 在 $\overline{B}_R\backslash B_r$ 中存在不动点.

证明 由定理1知，存在 $u\in\overline{B}_R\backslash B_r$，使得

$$\|u-Au\| = d(Au,\overline{B}_R). \tag{2}$$

下证 u 就是 A 的不动点：

若 A 满足条件1)且 $u\neq Au$，则存在 $y\in I_{\overline{B}_R}(u)$，使得

$$\|y-Au\| < \|u-Au\|. \tag{3}$$

从 $y\in I_{\overline{B}_R}(u)$，存在 $v\in\overline{B}_R,a>0$，使 $y=u+a(v-u)$，事实上，$a>1$，否则 $y=(1-a)u+av\in\overline{B}_R$. 从而由(2)和(3)式可知

$$d(Au,\overline{B}_R)\leqslant\|y-Au\|<\|u-Au\| = d(Au,\overline{B}_R),$$

矛盾. 令 $b=\dfrac{1}{a}$，则 $b\in(0,1)$. 由 $v=(1-b)u+by$ 及(3)式可知

$$\begin{aligned}\|v-Au\|&\leqslant(1-b)\|u-Au\|+b\|y-Au\|<(1-b)\|u-Au\|+b\|u-Au\|\\&=\|u-Au\|.\end{aligned}$$

这与(2)式矛盾. 故 $Au=u$.

若 A 满足条件2)，则 A 满足条件1)，从而 u 是 A 在 $\overline{B}_R\backslash B_r$ 中的不动点.

若 A 满足条件3)，且 $\|Au\|>R$，则由定理的证明可知 $\|Au-u\|=\|Au\|-R$，这与假设矛盾，故 $\|Au\|\leqslant R$，于是由(2)式可知 $u=Au$.

若 A 满足条件 4)且 $\|Au\|>R$，则 $\lambda=\frac{R}{\|Au\|}\in(0,1)$，从而由条件 4)并注意到 $\alpha>1$ 可知

$$\frac{\|Au-u\|^{\alpha}}{\|Au\|^{\alpha}}\geqslant 1-\lambda^{\alpha}>(1-\lambda)^{\alpha}=(1-\frac{R}{\|Au\|})^{\alpha},$$

即

$$\|Au-u\|>\|Au\|-R. \tag{4}$$

另一方面，由定理 1 的证明可知 $\|Au-u\|=\|Au\|-R$. 这与(4)式矛盾，故 $\|Au\|\leqslant R$，从而由(2)式知 $u=Au$.

若 A 满足条件 5)，则同理可证 $u=Au$.

若 A 满足条件 6)，且 $\|Au\|>R$，则由定理 1 的证明可知 $u=\frac{RAu}{\|Au\|}$，从而 $u\in\partial B_R$，$u=\lambda Au$，其中 $\lambda=\frac{R}{\|Au\|}\in(0,1)$，这与条件 6)矛盾，故 $\|Au\|\leqslant R$. 于是由(2)式可知 $u=Au$. 证毕.

定理 3 设 $A:\overline{B}_R\to X$ 是凝聚映象，若存在 $\delta>0$，使对 $\forall x\in\partial B_r$，有 $\|Ax\|\geqslant(1+\delta)\|x\|$，则存在 $u\in\overline{B}_R\backslash B_r$，使得

$$\|u-Au\|=d(Au,\overline{B}_R)=d(Au,\overline{B}_R\backslash B_r).$$

证明 设 $H:X\to\overline{B}_R$ 同定理 1，则 $Fx=H(Ax)$ 是映 $\overline{B}_R$ 到自身的凝聚映象，取 $\delta_1=\min\{\delta,\frac{R}{r}-1\}$，则仿[3]定理 5 之证明可知

$$\|Fx\|\leqslant\|x\|,\ \forall x\in\partial B_R,\quad \|Fx\|\geqslant(1+\delta_1)\|x\|,\ \forall x\in\partial B_r,$$

从而由[8]定理 5 可知，存在 $u\in\overline{B}_R\backslash B_r$，使得 $Fu=u$. 再仿定理 1 之证明可证

$$\|u-Au\|=d(Au,\overline{B}_R)=d(Au,\overline{B}_R\backslash B_r)$$

定理 4 设 A 具有定理 3 同样的条件，若 A 在外边界 ∂B_R 上满足定理 2 中条件 1)－6)之一，则 A 在 $\overline{B}_R\backslash B_r$ 中有不动点.

利用定理 3 仿定理 2 的证明可证定理 4 的结论成立.

注 1 易证[8]中的定理 5 对于半紧 1－集压缩映象也成立，从而在 F 半紧的条件下定理 3 对 1－集压缩映象 A 也成立.

注 2 定理 2 和 4 包含了[7,8]中关于区域压缩的结论.

注 3 利用[7,8]中关于锥映象的范数压缩定理容易把本文的结果推广到 A 是锥映象的情况，从而可以去掉[4,6]中对锥所加的任何条件.

注 4 当有限维空间 X 是奇数维时，可证郭氏定理([10,11])仍成立. 而当 X 是偶数维空间时，郭氏定理不成立；若增加一个条件 $Ax\neq\theta$，$x\in\Omega_2$，则郭氏定理仍成立. 从而对于连续映象 $A:\overline{\Omega}_2\to X$($\Omega_2$ 是含 θ 的有界开集)也有类似的逼近定理和不动点定理.

作者衷心感谢孙经先教授的热情指导.

参 考 文 献

[1] K. Fan, *Extensios of two fixed point theorms of F. E. Browder*, Math. Z. 112(1969), 234—240.

[2] T. C. Lin and C. L. Yen, *Application of the proximity map to fixed point theorems in Hilbert Space*, J. Approx. Theory, 52(1988), 141—148.

[3] T. C. Lin, *Approximation theorems and fixed point theorems in cones*, Proc. Amer. Math. Soc., 102(1988), 502—506.

[4] T. C. Lin, *A note on a theorem of Ky Fan*, Canad. Math. Bull., 22(1979), 513—515.

[5] V. M. Sehgal and S. P. Singh, *A generalization to multifunctions of Fan's best approximation theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., 102(1988), 534—537.

[6] 李国祯，Y—C Chen，在有序 Banach 空间锥上的逼近定理和不动点定理，工程数学学报，8(1991)，1:1—5.

[7] 孙经先，关于集压缩算子的某些不动点定理，科学通报，31(1986)，10：728—729.

[8] Sun Jingxian, *A generalization of Guo's Theorem and applications*, J. Math. Anal. Appl. 126(1987), 566—573.

[9] R. D. Nussbaum, *The fixed point index for local condensing maps*, Ann. Mat. Pure Appl., 89(1971), 217—258.

[10] 郭大钧，非线性泛函分析，山东科技出版社，1985.

[11] 郭大钧，区域拉伸与压缩不动点定理，曲阜师大学报，15(1989)，4：1—7.

Approximation Theorems and Fixed Point of Weakly Inward Mappings in Infinite Dimensional Banach Space

Liu Lishan

(Dept. of Maht., Qufu Normal University, Shandong)

Abstract

In this paper, we investigate the validity of an interesting theorem of Ky Fan [1, Theorem 2] defined on an annulue in infinite-dimensional Banach space. We prove that it is true for a condensing mapping under suitable conditions. As applications, some new fixed point are derived, and we also generalize some results of Sun [7,8].