二阶拟线性双曲型方程具特征边界的初边值问题*

陶 有 山
(复旦大学数学研究所，上海 200433)

摘　要　本文讨论问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x,u)u_{x_ix_j}=f(t,x,u,\partial u),\ (t,x)\in G\subset(0,+\infty)\times R^n, & (1)\\ u|_{\Sigma}=0, & (2)\\ u(t,x)|_{t=0}=u_t(t,x)|_{t=0}=0,\ x_n\geqslant 0, & (3)\end{cases}$$

其中，方程左端为严格双曲，Σ 为特征边界，设右端 $f(t,x,u,\partial u)$ 在 $|x|$ 充分大时等于 0，利用对称双曲组理论及文[5]的结果，通过迭代、模估计，得到了上述问题的 C^∞ 局部光滑解的存在、唯一性.

关键词　拟线性，双曲型方程，对称双曲组，特征边界混合问题，局部光滑解.

前　言

谷超豪在[1]，[2]，[3]中得到了拟线性正对称组边值问题的 C^∞ 解的存在、唯一性定理. 陈恕行在[4]，[5]中讨论了拟线性对称双曲组的具特征边界的初边值问题.

本文继[1]－[5]，讨论了二阶拟线性双曲型方程具特征边界的初边值问题(1)－(3). 首要的问题是弄清上述问题的确切提法. 我们提出四个基本假设：双曲假设(H_1)、边界特征假设(H_2)、关于右端项的假设(H_3)及相容性假设(H_4). 假设(H_2)尤为重要，它使得边界为特征. 显然，对于上述问题的处理不能象处理二阶拟线性双曲型方程的非特征边界的初边值问题那样，简单的通过引入新未知函数的方法，化成一阶双曲组来讨论. 但是，我们在讨论问题(1)－(3)时，线性问题还是转化成一阶双曲组来讨论的，然后通过迭代、模估计，得到问题(1)－(3)的 C^∞ 局部光滑解的存在、唯一性.

§1　问题的提出、基本假设

基本假设

(H_1)：(双曲假设)　设 $a_{ij}(t,x,u)$ 对称，关于各个变量 t,x,u 充分光滑；$(a_{ij}(t,x,w))$ 一致正定，即∃ 常数 Λ、$\lambda>0$ 使得

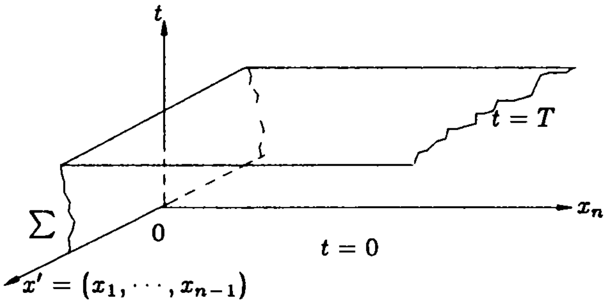
$$\lambda|\xi|^2\leqslant a_{ij}(t,x,u)\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda|\xi|^2,\quad\forall\ \xi\neq 0,\xi\in R^n. \tag{4}$$

(H_2)：(边界特征假设)　设 Σ 为过 $t=x_n=0$ 的一个曲面(见下图)，在其上给定 $u=0$，使得

* 1991年12月12日收到.

Σ 成为(1)的一个特征曲面. 设 $\vec{n}$ 为 Σ 相对于区域 G(G 以 $t=0,t=T(T>0)$ 及 Σ 为边界)的单位外法向,则在 Σ 上满足

$$n_t^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x,u)n_{x_i}n_{x_j},\quad \vec{n}=(n_t,n_1,\cdots,n_{x_n}),\quad n_t<0. \tag{5}$$



(H_3):(关于右端项的假设) 设 $f(t,x,u,\partial u)$ 关于各变量 $t,x,u,\partial u$ 充分光滑;$f(0,x,u,\partial u)$ 本身及其直至 $r-1$ 阶导数为零($r>8m+8,m=[\frac{n}{2}]+2$),又设 $f(x,t,u,\partial u)$ 在 $|x|$ 充分大时等于 0.

(H_4):(相容性假设) 在 $t=x_n=0$ 系数满足足够的相容性条件.

在上述基本假设$(H_1)-(H_4)$之下,问题(1)-(3)成为二阶拟线性双曲型方程具特征边界的初边值问题.

注 1 由假设(H_2)知,在 Σ 附近,对任意给定的 $u(t,x),u(t,x)|_\Sigma=0$,必存在(1)的一族特征曲面$\{\Gamma_a\}$,且在 Γ_a 上满足

$$n_t^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x,u(t,x))n_{x_i}n_{x_j}. \tag{5'}$$

注 2 由假设(H_3)及二阶拟线性双曲型方程 Cauchy 问题的解的存在、唯一性及双曲型方程解的依赖性知:在$|x|$充分大时,必有 $u(t,x)\equiv 0$,所以,仅需在一个紧支集上来讨论初边值问题(1)-(3).

§2 相应线性问题的转化

$$\begin{cases} u_{tt}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x,\bar{u})u_{x_ix_j}=f(t,x,\bar{u},\partial\bar{u}),\ (t,x)\in G, & (6)\\ u|_\Sigma=0, & (7)\\ u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0,\ x_n\geqslant 0. & (8)\end{cases}$$

选取函数 $\bar{u}(t,x)$ 满足:$\bar{u}(t,x)|_\Sigma=0$,令 $v=u,v_0=u_t,v_i=u_{x_i}(i=1,\cdots,n)$,

$$A^0=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\quad A^i=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0\\0&0&-a_{1i}&\cdots&-a_{ni}\\0&-a_{1i}&&&\\\vdots&\vdots&&0&\\0&-a_{ni}&&&\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

$$U=(v,v_0,v_1,\cdots,v_n)^T,\quad F=(0,f,0,\cdots,0)^T.$$

则有

$$LU\overset{\triangle}{=}A^0U_t+\sum_{i=1}^{n}A^iU_{x_i}+CU=F. \tag{9}$$

由 A^0、A^i 对称，A^0 正定推知：(9)为对称双曲组. 因为 $u|_\Sigma=0$，所以 $(n_{x_i}u_t-n_tu_{x_i})|_\Sigma=0$ (Σ 上切向导数为 0) ($i=1,\cdots,n$). 令

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & n_1 & -n_t & 0 & \cdots & 0\\ 0 & n_2 & 0 & -n_t & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & n_n & 0 & 0 & \cdots & -n_t\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

则

$$Mu|_\Sigma=0 \tag{10}.$$

显然

$$U|_{t=0}=0. \tag{11}$$

$$\beta=n_tA^0+n_{x_i}A^i=\begin{pmatrix}n_t & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & n_t & -\sum_i n_{x_i}a_{1i} & \cdots & -\sum_i n_{x_i}a_{ni}\\ 0 & -\sum_i n_{x_i}a_{1i} & n_ta_{11} & \cdots & n_ta_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & -\sum_i n_{x_i}a_{ni} & n_ta_{n1} & \cdots & n_ta_{nn}\end{pmatrix} \tag{12}$$

引理 1 边界 Σ 相对于对称双曲组(9)来说为正则特征.

证明 首先证边界 Σ 为(9)的特征，即证 $\operatorname{rank}\beta|_\Sigma=$ 常数 $<n+2$($=U$ 的维数).

由(5)知：$(n_t,-\sum_i n_{x_i}a_{1i},\cdots,-\sum_i n_{x_i}a_{n_i})$，$(-\sum_i n_{x_i}a_{ji},n_ta_{j1},\cdots,n_ta_{jn})$ ($j=1,\cdots,n$) 为 Σ 上 $n+1$ 个切方向. 再注意到 $\dim\Sigma=n$，(n_ta_{ij})负定，立即有 $\operatorname{rank}\beta|_\Sigma=n+1$.

利用基本假设(H_2)，(5′)重复上面的证明，可知在 Σ 附近 β 的秩保持不变. 所以边界 Σ 为(9)的正则特征.

引理 2 在 Σ 上 $\Pi:MU=0$ 为正常合格，即在 Σ 上 $\Pi:MU=0$ 为 $U\cdot\beta U$ 的最大非负子空间.

证明 注意到 $(-\sum_i n_ta_{ji},n_ta_{j1},\cdots,n_ta_{jn})$ ($j=1,\cdots,n$)，$(n_t,-\sum_i n_ta_{1i},\cdots,-\sum_i n_ta_{ni})$ 为 Σ 上 $n+1$ 个切方向. 因为 $U\cdot\beta U|_\Sigma=0$，所以 $\Pi:MU=0$ 为 $U\cdot\beta U$ 的最大非负子空间.

易证，对于古典解来说，方程(6)－(8)与方程组(9)－(11)是等价的. 即若 u 为(6)－(8)的古典解，则 $(u, u_t, u_{x_1}, \cdots, u_{x_n})$ 满足(9)－(11)，又若 $U=(v, v_0, v_1, \cdots, v_n)$ 为(9)－(11)的古典解，则 U 满足适当的初边值条件时，v 必为(6)－(8)的古典解.

§3 空间 B_p；相应于原问题的迭代序列的存在性及其 B_p 范数的一致有界性

仿文[5]，取完备的切边算子系 $D_a=d_a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ $(a=1,\cdots,m_0)$，$D_0=aI$，$|u|_s$ 表示 $C^s(\Omega)$ 空间中的范数 $D_q^p u$ 表示 u 的 p 次广义导数，其中含 q 次非切边导数，$\widetilde{H}_t^s$ 表示满足条件 $D_q^p u\in L^2(\Omega)$ $(p\leqslant s, q\leqslant t)$ 的函数 u 的集合，它是 Hilbert 空间，范数记为 $\|\cdot\|_{\widetilde{H}_t^s}$，对足够大的正整数 $p(>8m+8)$ 引入 Hilbert 空间 $\widetilde{B}_p$：$\widetilde{B}_p=\bigcap_{\delta\leqslant p/2}\widetilde{H}_\delta^{p-\delta}(\Omega)$. 记 $\|\cdot\|_{\widetilde{B}_p}=(\sum_{\delta\leqslant p/2}\|\cdot\|^2_{\widetilde{H}_\delta^{p-\delta}})^{1/2}$，设 $\widetilde{B}_p(\mu)$ 为 $\widetilde{B}_p$ 中所有满足 $\|U\|_{\widetilde{B}_p}\leqslant\mu$($\mu$ 为充分小的正数)，$\partial_t^k U|_{t=0}=0$ $(k\leqslant p-1)$ 的 C^∞ 函数 U 的集合.

对于取值于 $\boldsymbol{R}^{n+2}$ 的函数 U，我们定义了空间 $\widetilde{B}_p$，同样，对于取值于 R^1 的函数 u，可定义空间 B_p. 由 U 与 u 的关系知：$U\in\widetilde{B}_p\Leftrightarrow u\in B_{p+1}$.

由引理 1，2，利用文[5]中的结果有：

定理 1 若 $h_1>0$ 充分小，则对 $0\leqslant t\leqslant h_1$，$p>8m+8$，$m=[\frac{n}{2}]+2$，$\bar{u}\in B_{p+1}(\mu)$，方程组(9)－(11)有解 U 存在，且 $U\in\widetilde{B}_p(\mu)$.

由此推知：

定理 2 若 $h_1(h_1>0)$ 充分小，则对 $0\leqslant t\leqslant h_1$，$p$，$m$，$\bar{u}$ 同上，方程(6)－(8)有解 u 存在，且 $u\in B_{p+1}(\mu)$.

现在考察问题(1)－(3)的迭代序列：

$$\begin{cases} Lu^{(v+1)}=u_{tt}^{(v+1)}-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x,u^{(v)})u_{x_ix_j}^{(v+1)}=f(t,x,u^{(v)},\partial u^{(v)}), & (13)\\ u^{(v+1)}|_\Sigma=0, & (14)\\ u^{(v+1)}|_{t=0}=u_t^{(v+1)}|_{t=0}=0, \quad x_n\geqslant 0, \quad v=0,1,2,\cdots & (15)\end{cases}$$

任取 $u^{(0)}\in B_{p+1}(\mu)$，由定理 2 知：

定理 3 存在充分小的 $h_1>0$，使得对 $p>8m+8$，$m=[\frac{n}{2}]+2$，$0\leqslant t\leqslant h_1$，迭代序列 $\{u^{(v)}\}$ $(v=0,1,2,\cdots)$ 存在，且 $u^{(v)}\in B_{p+1}(\mu)$.

注 3 定理 3 包含了 $\{u^{(v)}\}$ 的 B_{p+1} 范数的一致有界性：$\|u^{(v)}\|_{B_{p+1}}\leqslant\mu$ $(v=0,1,2,\cdots)$.

又 $p>8m+8$，所以 $B_p\subset\widetilde{H}_{4m+4}\rightarrow C^{3m+4}$，故

$$\|u^{(v)}\|_{\widetilde{H}_{4m+4}}\leqslant\mu,\quad \|u^{(v)}\|_{C^{3m+4}}\leqslant\widetilde{C}\ (\widetilde{C}>0\ \text{为与}\ h_1, G\ \text{有关的常数}).$$

§4 能量不等式

定理 4 对上节中的迭代序列 $\{u^{(v)}\}_{v=0}^\infty$ 来说，存在充分小的 $h_2>0$ $(h_2\leqslant h_1)$，使得下列能量

不等式：

$$\| u^{(v+1)} \|_{\bar{H}_1(G_h)} \leqslant ch^{\frac{1}{2}} \| f(t,x,u^{(v)},\partial u^{(v)}) \|_{L^2(G_h)}. \tag{16}$$

对$\forall\ 0 \leqslant h \leqslant h_2$成立. 其中$G_h$由$t=0, t=h, \Sigma$所围区域，而$c$为仅与$h_1, G_T$有关，而与$v, h, t, x$无关的正常数.

证明 设$\Omega(\bar{t})$为$t=\bar{t}$平面截面G_T后所得截面. 在方程(13)两边同乘$u_t^{(v+1)}$，然后在$\Omega(t)\times(0,t_1)$上积分：

$$\int_0^{t_1}\int_{\Omega(t)}(u_t^{(v+1)}u_{tt}^{(v+1)} - u_t^{(v+1)}\sum_{i,j}a_{ij}(t,x,u^{(v)})u_{x_ix_j}^{(v+1)})dxdt = \int_0^{t_1}\int_{\Omega(t)}f(t,x,u^{(v)},\partial u^{(v)})u_t^{(v+1)}dxdt \tag{17}$$

记$E(t) = \int_{\Omega(t)}[u_t^{(v+1)})^2 + \sum_{i,j}a_{ij}(t,x,u^{(v)})u_{x_i}^{(v+1)}u_{x_j}^{(v+1)}]dx$. 利用基本假设$(H_1)-(H_4)$，注1,2,3，由(17)可得

$$\begin{aligned}E(t_1) &+ \int_0^{t_1}\int_\Sigma \frac{1}{n_t}[(\frac{1}{2}(u_t^{(v+1)})^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}(t,x,u^{(v)})u_{x_i}^{(v+1)}u_{x_j}^{(v+1)})n_t^2 \\ &- n_t\sum_{i,j}u_t^{(v+1)}a_{ij}(t,x,u^{(v)})u_{x_i}^{(v+1)}n_{x_j}]dsdt \\ &\leqslant C_1\int_0^{t_1}\int_{\Omega(t)}f^2(t,x,u^{(v)},\partial u^{(v)})dxdt + C_2\int_0^{t_1}E(t)dt.\end{aligned} \tag{18}$$

注意到：$u_t^{(v+1)}n_{x_i} - u_{x_i}^{(v+1)}n_t\ (i=1,\cdots,n)$在$\Sigma$上为$u^{(v+1)}$的切向导数，但$u^{(v+1)}|_\Sigma=0$，再由(5)，有

不等式(18)左端的第二项

$$= \int_0^{t_1}\int \frac{\frac{1}{2}}{n_t}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x,0)(u_t^{(v+1)}n_{x_i} - u_{x_i}^{(v+1)}n_t)(u_t^{(v+1)}n_{x_j} - u_{x_j}^{(v+1)}n_t)dsdt = 0, \tag{19}$$

所以对$\forall\ 0<t_1<t_2\leqslant h_1$，由(18)、(19)可得：$E(t_1)\leqslant C\| f(t,x,u^{(v)},\partial u^{(v)}) \|^2_{L^2(G_{t_2})}$($C$与$C_1, h_1$有关).

所以$\| \nabla u^{(v+1)}(t_1) \|^2 \leqslant C^2 \| f(t,x,u^{(v)},\partial u^{(v)}) \|^2_{L^2(G_{t_2})}$. 两边对$t_1$从0到$t_2$积分，再由$t_2$的任意性，得$\| u^{(v+1)} \|_{\bar{H}_1(G_h)} \leqslant ch^{1/2} \| f(t,x,u^{(v)},\partial u^{(v)}) \|_{L^2(G_h)}$，$\forall\ 0\leqslant h\leqslant h_1$.

§5　迭代序列的收敛性、原问题局部光滑解的存在、唯一性

考察序列$\{u^{(v)}\}$的收敛性. 令$\Delta^{(v+1)}=u^{(v+1)}-u^{(v)}$，由(13)－(15)，得

$$\begin{cases}L\Delta^{(v+1)} = f^{(v+1)}, \\ \Delta^{(v+1)}|_\Sigma = 0, \\ \Delta^{(v+1)}|_{t=0} = \Delta_t^{(v+1)}|_{t=0} = 0, \quad x_n \geqslant 0.\end{cases}$$

其中，

$$f^{(v+1)} = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(t,x,u^{(v)}) - a_{ij}(t,x,u^{(v-1)})u_{x_ix_j}^{(v-1)} + f(t,x,u^{(v)},\partial u^{(v)}) - f(t,x,u^{(v-1)},\partial u^{(v-1)}).$$

利用定理4得：对$0\leqslant h\leqslant h_2$成立

$$\| \Delta^{(v+1)} \|_{\bar{H}_1(G_h)} \leqslant Ch^{1/2} \| f^{(v+1)} \|_{L^2(G_h)}. \tag{20}$$

利用(H_1)，(H_3)及注3有：

$$\| f^{(v+1)} \|_{L^2(G_h)} \leqslant \widetilde{C} \| \Delta^{(v)} \|_{\widetilde{H}(G_h)}. \tag{21}$$

由(20),(21)得 $\| \Delta^{(v+1)} \|_{\widetilde{H}_1(G_h)} \leqslant \widetilde{\widetilde{C}} h^{1/2} \| \Delta^{(v)} \|_{\widetilde{H}(G_h)}$. 所以$(u^{(v)}-u^{(v-1)})$为$\widetilde{H}_1(G_h)$中的 Cauchy 序列. 又$\widetilde{H}_1(G_h)$为完备的 Banach 空间. 所以$\{u^{(v)}\}$在$\widetilde{H}_1(G_h)$中收敛,极限记为 u. 又$\{u^{(v)}\}$在B_{p+1}中范数一致有界,因此由 Banach—Sacks 定理知:$u \in B_{p+1} \to C^{\frac{p+1}{2}-m}$. 据此,得到本文的主要结果:

定理 5 对于二阶拟线性双曲型方程初边值问题(1)—(3),在基本假设(H_1)—(H_4)之下,存在充分小的$\delta>0$,使当$h \leqslant \delta$时,问题(1)—(3)∃! 的$C^{\frac{p+1}{2}-m}(G_h)$光滑解.

证明 存在性部分上面已证. 唯一性部分:设有两个$C^{\frac{p+1}{2}-m}$光滑解u, u',令$\Delta=u-u'$,则与上面的证明类似可得$\| \Delta \|_{\widetilde{H}_1}=0$. 所以$u=u'$

参 考 文 献

[1] 谷超豪,正对称方程组的可微分解理论,数学学报,14(1964),503—516.

[2] 谷超豪,对称双曲型方程组的一些边值问题,数学进展,3(1965),272—276.

[3] 谷超豪,对称双曲型方程组的一些边值问题及其对混合型方程的应用,数学学报,21(1978),119—129.

[4] 陈恕行,拟线性对称双曲组的初边值问题及其应用,数学年刊,1(3,4) 1980,511—521.

[5] 陈恕行,拟线性对称双曲组具有特征边界的初边值问题,数学年刊,3(2) 1982,223—232.

[6] K. O. Friadrichs, *Symmetric positive linear differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. 11(1958), 333—418.

[7] P. D. Lax and R. S. Phillips, *Symmetric linear differential operators*, Comm. Pure Appl. Math. 13(1960), 427—455.

[8] T. Ohkubo, *Well posedness for quasi—linear hyperbolic mixed problems with characteristic boundary*, *Hokkaido*, Math. Jour. (1) 18, (1989), 79—123.

[9] Qlivier Gues, *Probleme mixte hyperbolique quasi — lineaire caracteristique*, Commun. in Partial Differential Equations, 15(5) 595—645(1990).

The Initial-Boundary Problems for Quasilinear Hyperbolic Equation with Characteristic Boundary

Tao Youshan

(Institute of Mathematics, Fudan University, Shanghai 200433)

Abstract

In this paper we discuss the initial-boundary problems for quosilinear hyperbolic equation with characteristic boundary. Making use of the theory of symmetric hyperbolic system and the result of [5], we prove the existence and uniqueness of the local (in tims) smooth solution for the above problem.