第14卷第3期 数学研究与评论 Vol. 14 No. 3
1994年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1994

# $P_{q-1}$的补图的色唯一性*

刘儒英

(青海师范大学数学系,西宁 810008)

**摘要** 用$P_n$表示有$n$个顶点的路. 本文证明了,如果$q>5$是素数,则$P_{q-1}$的补图是色唯一的.

**关键词** 图,色多项式,色唯一图.

## 一 引言

本文仅考虑有限、无向、无环的简单图,凡未声明的术语和记号均参见[1].

用$P(G,\lambda)$表示图$G$的色多项式,如果从$P(H,\lambda)=P(G,\lambda)$可以推出图$H$和$G$同构,则称$G$是色唯一的. 关于色唯一图的研究,已有大量结果[2]. 用$P_n$表示有$n$个顶点的路,$\overline{G}$表示$G$的补图. 本文用全新的方法给出了一类新的色唯一图,即证明了:如果$q$是大于5的素数,则$\overline{P}_{q-1}$是色唯一图.

## 二 预备知识

若图$G$的生成子图$G_0$的每个分支都是完全图,则称$G_0$为$G$的理想子图. 用$N(G,k)$表示图$G$的具有$k$个分支的理想子图的个数,则有[3]

$$P(G,\lambda)=\sum_{i=1}^{p}N(\overline{G},i)(\lambda)_i \tag{1}$$

这里,$p$为$G$的顶点数,$(\lambda)_i=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-i+1)$.

把多项式

$$h(G,x)=\sum_{i=1}^{p}N(G,i)x^i \tag{2}$$

叫做图$G$的伴随多项式,这里$p$为$G$的顶点数.

称图$G$是伴随唯一的,若由$h(H,x)=h(G,x)$可以推出$H$和$G$同构. 由(1)、(2)两式可知,把$\overline{G}$的伴随多项式中的$x^i$换成$(\lambda)_i$,$i=1,2,\cdots,p$,即得到$G$的色多项式. 因此,图$G$是色唯一的当且仅当$\overline{G}$是伴随唯一的. 通过$\overline{G}$的伴随多项式研究$G$的色唯一性,是一种新的研究模式.

**引理1**[3] 设图$G$有$k$个分支:$G_1,G_2,\cdots,G_k$,则$h(G,x)=h(G_1,x)h(G_2,x)\cdots h(G_k,x)$.

为了讨论方便,记$b_i(G)=N(G,p-i)$,$i=0,1,\cdots,p-1$. 并注意到$b_0(G)=N(G,p)=1$,则$G$的伴随多项式(2)可改写为:$h(G,x)=x^p+b_1(G)x^{p-1}+b_2(G)x^{p-2}+\cdots+b_{p-1}(G)x$. 此外,设$f(x)$是任意一个一元多项式,用记号$\partial(f(x))$表示$f(x)$的次数. 另外,用$p(G)$,$e(G)$分别表示

* 1991年12月15日收到. 国家自然科学基金资助项目.

图 $G$ 的顶点数和边数.

**引理 2**[3] 设 $G$ 是任意一个图,则(i) $\partial(h(G,x))=p(G)$;(ii) $b_1(G)=e(G)$.

**引理 3**[4,5] 若 $G$ 是连通图,且 $G\not\cong K_3$,则 $b_2(G)\leqslant\binom{b_1(G)-1}{2}$,其中等号成立当且仅当 $G\cong P_{b_1(G)+1}$.

**引理 4**[6] $h(P_n,x)=\sum\limits_{\frac{n}{2}\leqslant k\leqslant n}\binom{k}{n-k}x^k$.

由引理 4,$h(P_n,x)$可以写成如下形式:

$$h(P_n,x)=x^{a(P_n)}h_1(P_n,x),\tag{3}$$

这里,$a(P_n)=[\frac{n+1}{2}]$,$h_1(P_n,x)$是常数项不为零的多项式.

**引理 5**[7] 若 $u,v$ 是图 $G$ 的两个相邻顶点,且边 $uv$ 不属于 $G$ 的任何三角形,则

$$h(G,x)=h(G-uv,x)+xh(G-\{u,v\},x).$$

**引理 6** 把 $h(P_k,x)$简记为 $h(P_k)$,则

(i) $h(P_{m+n})=h(P_m)h(P_n)+xh(P_{m-1})h(P_{n-1})$, $(m\geqslant 2,n\geqslant 2)$;

(ii) $h(P_n)h(P_{n+3})-h(P_{n+1})h(P_{n+2})=(-1)^n x^{n+2}$, $(n\geqslant 1)$.

**证明** (i) 把路 $P_{m+n}$ 的顶点从一端开始,按相邻关系依次记为 $v_1,v_2,\cdots,v_{m+n}$. 令 $u=v_m$,$v=v_{m+1}$,用引理 5 和引理 1 即得.

(ii) 对 $n$ 用归纳法. 当 $n=1$ 时,容易验证:$h(P_1)h(P_4)-h(P_2)h(P_3)=-x^3$.

假设等式对 $n-1$ 成立,则由本引理之(i)得

$$\begin{aligned}h(P_n)h(P_{n+3})+xh(P_{n-1})h(P_{n+2})&=h(P_{2n+3})\\&=h(P_{n+1})h(P_{n+2})+xh(P_n)h(P_{n+1})\end{aligned}$$

由上式及归纳假设,得

$$\begin{aligned}h(P_n)h(P_{n+3})-h(P_{n+1})h(P_{n+2})&=-x(h(P_{n-1})h(P_{n+2})-h(P_n)h(P_{n+1}))\\&=-x\cdot(-1)^{n-1}x^{n+1}=(-1)^n x^{n+2}.\end{aligned}$$

**引理 7** 设 $n\geqslant 2$,则 $h(P_n)\mid h(P_m)$的充要条件是$(n+1)\mid(m+1)$.

**证明** (i)充分性. 设 $m+1=k(n+1)$,这里 $k$ 是正整数. 对 $k$ 用归纳法.

当 $k=1$ 时,$m=n$,故 $h(P_n)\mid h(P_m)$. 假设 $k=t-1$ 结论成立,即 $h(P_n)\mid h(P_{(t-1)(n+1)-1})$. 则由引理 6 之(i),得 $h(P_{t(n+1)-1})=h(P_{(t-1)(n+1)-1})h(P_{n+1})+xh(P_{(t-1)(n+1)-2})h(P_n)$. 注意到 $h(P_n)$可整除上式右端的每一项,因此,$h(P_n)\mid h(P_{t(n+1)-1})$.

(ii) 必要性 先证一个如下的断言:

断言甲: 设 $n\geqslant 2$,若 $h(P_n)\mid h(P_m)$,并且 $m-(n+1)>1$,则 $h(P_n)\mid h(P_{m-n-1})$.

事实上,由引理 6 之(i),有 $h(P_m)=h(P_{m-n-1})h(P_{n+1})+xh(P_{m-n-2})h(P_n)$. 由 $h(P_n)\mid h(P_m)$可知 $h_1(P_n)\mid h(P_m)$,从而有 $h_1(P_n)\mid h(P_{m-n-1})h(P_{n+1})$,即

$$h_1(P_n)\mid x^{a(P_{m-n-1})}h_1(P_{m-n-1})h(P_{n+1}).\tag{4}$$

由引理 6 之(ii),$(h_1(P_n),h(P_{n+1}))=1$(互素),另外,显然有$(h_1(P_n),x^{a(P_{m-n-1})})=1$,因此,

$$(h_1(P_n),x^{a(P_{m-n-1})}h(P_{n+1}))=1.\tag{5}$$

由(4)及(5)两式得 $h_1(P_n)\mid h_1(P_{m-n-1})$. 由引理 4 易知,$m-n-1\geqslant 0$,从而有 $a(P_{m-n-1})\geqslant a(P_n)$,

因此，$h(P_n)\mid h(P_{m-n-1})$. 断言甲证毕.

设 $m=k(n+1)+i, 2\leqslant i\leqslant n+2$.. 连续应用断言甲的推理，最后得 $h(P_n)\mid h(P_{m-k(n+1)})$，即 $h(P_n)\mid h(P_i)$，所以 $i\geqslant n$. 但是由引理 6 之(ii)知，$h(P_n)\nmid h(P_{n+1})$，$h(P_n)\nmid h(P_{n+2})$. 因此 $i=n$. 即 $m=k(n+1)+n, m+1=(k+1)(n+1)$.

## 三　主要结果及证明

**引理 8**　设 $g(x)=x^l\prod_{i=1}^{n}g_i(x)$，并设

$$g(x)=x^t+b_1x^{t-1}+b_2x^{t-2}+\cdots+b_t,\quad g_i(x)=x^{t_i}+b_{i1}x^{t_i-1}+b_{i2}x^{t_i-2}+\cdots+b_{it_i}.$$

这里 $n\geqslant 1$，$l$ 及 $b_{ij}$ 都是非负整数，且 $b_{i1}>0$. $i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,t_i$. 如果 $b_2=\binom{b_1-1}{2}$，且 $b_{i2}\leqslant\binom{b_{i1}-1}{2}$，$(i=1,2,\cdots,n)$. 则至少存在一个 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$，使得 $b_{k2}=\binom{b_{k1}-1}{2}$.

**证明**　若对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，都有 $b_{i2}\leqslant\binom{b_{i1}-1}{2}-1$，即 $2b_{i2}\leqslant b_{i1}^2-3b_{i1}$. 则

$$2\sum_{i=1}^{n}b_{i2}\leqslant\sum_{i=1}^{n}b_{i1}^2-3\sum_{i=1}^{n}b_{i1}.\tag{6}$$

而由引理的假设 $g(x)=x^l\prod g_i(x)$ 可得

$$b_1=\sum_{i=1}^{n}b_{i1},\qquad b_2=\sum_{i=1}^{n}b_{i2}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}b_{i1}b_{j1}.$$

又由 $b_2=\binom{b_1-1}{2}$，得 $2b_2=b_1^2-3b_1+2$，所以

$$2\sum_{i=1}^{n}b_{i2}+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}b_{i1}b_{j1}=\sum_{i=1}^{n}b_{i1}^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}b_{i1}b_{j1}-3\sum_{i=1}^{n}b_{i1}+2.$$

化简得

$$2\sum_{i=1}^{n}b_{i2}=\sum_{i=1}^{n}b_{i1}^2-3\sum_{i=1}^{n}b_{i1}+2.\tag{7}$$

(6)，(7)两式矛盾. 引理证毕.

**引理 9**　若 $m\neq 4$，且 $m+1$ 是素数，那么 $h(P_m)$ 不含因子 $x^2+3x+1$.

**证明**　假设 $(x^2+3x+1)\mid h(P_m)$. 由于 $(x^2+3x+1)$ 不能整除 $h(P_2)$ 和 $h(P_3)$，以及所设条件 $m\neq 4$，可知 $m\geqslant 5$. 所以 $a(P_m)\geqslant 2$，即 $x^2\mid h(P_m)$. 又因为 $(x^2,x^2+3x+1)=1$，所以

$$x^2(x^2+3x+1)\mid h(P_m).$$

即 $h(P_4)\mid h(P_m)$. 由引理 7，$5\mid(m+1)$，这与 $m+1$ 是素数矛盾. 证毕.

**定理**　设 $q$ 为素数，$q>5$，则 $P_{q-1}$ 是伴随唯一的.

**证明**　设存在图 $H$，满足

$$h(H,x)=h(P_{q-1},x)\tag{8}$$

**情形 I**　$H$ 是连通图，则由 $q-1\neq 3$ 知 $H\ncong K_3$，由(8)式及引理 3 知，$b_2(H)=\binom{b_1(H)-1}{2}$，所以，$H\cong P_{q-1}$.

情形 Ⅱ　$H$ 不连通. 设 $H$ 有 $l$ 个孤立点以及 $r$ 个非孤立点分支: $H_1, H_2, \cdots, H_r$, $(l \geqslant 0, r \geqslant 1)$. 则

$$x^l \prod_{i=1}^{r} h(H_i, x) = h(H, x) = h(P_{q-1}, x). \tag{9}$$

由引理 9, $h(P_{q-1}, x)$ 不含因子 $x^2+3x+1$, 而注意到 $h(K_3, x) = x(x^2+3x+1)$, 所以, 对每个 $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$, 都有 $H_i \ncong K_3$. 设 $h(H_2, x) = x^{l_i} + b_{i1}x^{l_i-1} + b_{i2}x^{l_i-2} + \cdots$, 则由引理 3, 得 $b_{i2} \leqslant \binom{b_{i1}-1}{2}$, $i = 1, 2, \cdots, r$.

另外, 令 $h(H, x) = x^{q-1} + b_1x^{q-2} + b_2x^{q-3} + \cdots$, 由(8)式及引理 3 得, $b_2 = \binom{b_1-1}{2}$. 则由引理 8 可知, 至少存在一个 $j \in \{1, 2, \cdots, r\}$, 使得

$$b_{j2} = \binom{b_{j1}-1}{2}. \tag{10}$$

由(10)式及引理 3, 可知 $H_j \cong P_{l_j}$. 又由(9)式得, $h(P_{l_j}) \mid h(P_{q-1})$. 再由引理 7, $(l_j+1) \mid q$. 由于 $q$ 是素数, 故只能是 $l_j+1=1$ 或 $l_j+1=q$. 由 $l_j+1=1$ 得 $l_j=0$, 而 $l_j$ 是 $H_j$ 的顶点数, 故这不可能. 当 $l_j+1=q$ 时, 得 $l_j=q-1$. 这意味着 $H_j=H$. 这与 $H$ 不连通矛盾. 总之, 情形 Ⅱ 不可能发生.

综上所述, 只有 $H \cong P_{q-1}$. 证毕.

**推论**　设 $q$ 为素数$(q>5)$则 $\bar{P}_{q-1}$ 是色唯一的图.

## 参 考 文 献


[1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, Noth-Holland, 1976.

[2] K. M. Koh and K. L. Teo, *The search for chromatically unique graphs*, Graphs and Combinatorics, 6(1990), 259—285.

[3] 刘儒英, 求图的色多项式的一种新方法及其应用, 科学通报, 32(1987), 77.

[4] 刘儒英、王建方, 关于圈与路之并的补图的色唯一性, 理论计算机科学(丛刊), 上海科技文献出版社, 第一辑(1991), 112—126.

[5] 刘儒英, 图 $K_s - E(kP_s \cup rP_t)$ 的色唯一性, 系统科学与数学, 12(1992), 207—214..

[6] 刘儒英, 关于两类图的色多项式, 科学通报, 32(1987), 236.

[7] 刘儒英, 图的伴随多项式, 青海师范大学学报, 1990 第 3 期, 1—9.


# Chromatic Uniqueness of Complementary Graphs of $P_{q-1}$


*Liu Ruying*

(Dept. of Maht., Qinghai Normal University, Xining )



### Abstract

Let $P(G, \lambda)$ denote the chromatic polynomial of a graph $G$. Then $G$ is said to be chromatically unique if $P(H, \lambda) = P(G, \lambda)$ implies that $H$ is isomorphic to $G$. Let $P_n$ denote the path with $n$ vertices, $\bar{G}$ denote the complementary graph of $G$. In this paper, we prove that the $\overline{P_{q-1}}$ is chromatically unique if $q > 5$ is prime number.