第14卷第4期 数学研究与评论 Vol. 14 No. 4
1994年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1994

Lipschitz 泛函的本质临界点*

范先令
(兰州大学数学系，兰州 730000)

摘要 本文指出 Banach 空间中 C^{1-0}(即局部 Lipschitz)泛函的 Clarke-临界点一般不具有在 C^{1-0} 局部坐标变换下的不变性. 据此提出了 C^{1-0} 泛函的本质临界点的概念，它能适应研究 C^{1-0} 流形上的 C^{1-0} 泛函的临界点的需要. 还给出了有关本质临界点的几个结果.

关键词 Banach 空间，Lipschitz 流形，Lipschitz 泛函，临界点.

本文中，X 表示 Banach 空间，R 表示实数空间，C^1 与 C^{1-0} 分别表示连续可微映射类与局部 Lipschitz 映射类. 对于 $f\in C^{1-0}(X,R)$，$\partial f(x)$ 表示 f 在 $x\in X$ 的 Clarke 广义梯度(见[1]). 广义梯度是梯度概念的推广，它在非光滑分析与优化理论中十分有用(见[1]). 例如，下述 Fermat 定理的推广形式成立：

若 x_0 是 $f\in C^{1-0}(X,R)$ 的局部极值点，则 $0\in\partial f(x_0)$.

下述定义已是普遍采用的.

定义 1 设 $f\in C^{1-0}(X,R)$，$x_0\in X$. 若 $0\in\partial f(x_0)$，则 x_0 称为 f 的临界点. 否则称 x_0 为 f 的正则点.

张恭庆在[2]中成功地将 C^1 泛函的临界点理论推广到 Banach 空间(或 C^{2-0}-Banach 流形)上的 C^{1-0} 泛函的情形. 此外还有不少结果反映了 C^{1-0} 泛函与 C^1 泛函间的类似之处. 本文中将指出二者的临界点概念间的一种差异.

在 C^{1-0} 范畴的框架中，自然要考虑 C^{1-0} 流形上的 C^{1-0} 泛函及其临界点. 这在实际应用中也是需要的. 为明确起见，我们写出下面的

定义 2(见[3]) 设 M 是以 X 为模空间的拓扑流形. 若存在 M 上的 C^{1-0} 图册 $\mathfrak{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$，即当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 时，其传递函数 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}\in C^{1-0}$，则称 $(M,\mathfrak{D})$ 为 C^{1-0}-Banach 流形.

定义 3 设 $(M,\mathfrak{D})$ 是以 X 为模的 C^{1-0} 流形，$f:M\to R$ 连续. 若对于 M 中的每点 x，存在 x 处的某个局部坐标系 $(U,\varphi)\in\mathfrak{D}$，使得 $f\circ\varphi^{-1}\in C^{1-0}(\varphi(U,R))$，则称 $f\in C^{1-0}(M,R)$.

由于两个 C^{1-0} 映射的复合仍是 C^{1-0} 的，知定义 3 不依赖于局部坐标系的选取. 一般地，可以合理地定义两个 C^{1-0} 流形间的 C^{1-0} 映射的概念(这里略去).

问题是怎样合理地定义 C^{1-0} 流形上的 C^{1-0} 泛函的临界点的概念. 仿照 C^1 的情形，我们暂且先写出下面的定义.

定义 4 设 M 是 C^{1-0} 流形，$f\in C^{1-0}(M,R)$，$x_0\in M$. 若存在 x_0 处的某个局部坐标系 $(U,$

* 1992年5月24日收到. 国家自然科学基金资助项目.

φ)，使得 $\varphi(x_0)$ 是 $f\circ\varphi^{-1}$ 的临界点，即有 $0\in\partial(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x_0))$，则称 x_0 是 f 的临界点.

问题在于定义 4 是否也不依赖于局部坐标系的选取？这归结于下面的

问题 设 U 和 V 是 X 中的开集，$T:U\to V$ 是 C^{1-0} 同胚，即 $T:U\to V$ 是同胚，且 T 与 T^{-1} 均是 C^{1-0} 的. 设 $x_0\in U$，$T(x_0)=y_0$，$f\in C^{1-0}(V,R)$，令 $g=f\circ T:U\to R$(这时有 $g\in C^{1-0}$). 问这时是否一定有结论：

$$y_0\text{ 是 } f \text{ 的临界点} \Leftrightarrow x_0 \text{ 是 } g \text{ 的临界点}.$$

显见，y_0 是 f 的极小点(或极大点)$\Leftrightarrow x_0$ 是 g 的极小点(相应地，极大点).

但可惜，下例表明，即使在 $X=R^2$ 的情形，对上述问题的回答也是否定的.

例 设 $X=R^2$，$f:R^2\to R$ 定义为

$$f(x_1,x_2)=x_1,\quad \forall\, x=(x_1,x_2)\in R^2.$$

将 R^2 视为复平面，其中的点用复数表示为 $x=re^{i\theta}$，$(r\geqslant 0, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$. 定义 $T:R^2\to R^2$ 为 $T(re^{i\theta})=re^{i\varphi(\theta)}$，其中

$$\varphi(\theta)=\begin{cases}\theta, & \theta\in[0,\frac{\pi}{6}],\\ 7\theta-\pi, & \theta\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}],\\ \theta+\pi, & \theta\in[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}],\\ \frac{1}{4}\theta+\frac{3}{2}\pi, & \theta\in[\frac{2\pi}{3},2\pi].\end{cases}$$

令 $g=f\circ T:R^2\to R$.

易见 $T:R^2\to R^2$ 是同胚，且 T 与 T^{-1} 均是 C^{1-0} 的，并注意 T 映原点为原点. 现 $f\in C^1(R^2,R)$，且对每点 $(x_1,x_2)\in R^2$，均有 $f'(x_1,x_2)=(1,0)\neq(0,0)$. 故 f 在 R^2 中无临界点，特别，原点不是 f 的临界点，而 $g\in C^{1-0}(R^2,R)$. 我们断言，原点是 g 的临界点. 事实上，由 T 的定义知，当 $x\in G_1:=\{x=re^{i\theta}:r\geqslant 0,\theta\in[0,\frac{\pi}{6}]\}$ 时，$T(x)=x$. 这时 $g(x)=f(T(x))=f(x)=x_1$. 于是，当 $x\in \dot{G}$ ($\dot{G}_1$ 表示 G_1 的内部)时，有 $g'(x)=(1,0)$. 在 $\dot{G}_1$ 中取收敛于原点的点列 $\{z_n\}$，则有 $\lim g'(z_n)=(1,0)\in\partial g(0,0)$ (见[1]). 类似地，当 $x\in G_3:=\{x=re^{i\theta}:r\geqslant 0,\theta\in[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]\}$ 时，$T(x)=-x$，$g(x)=f(T(x))=f(-x)=f(-x_1,-x_2)=-x_1$. 因此，当 $x\in\dot{G}_3$ 时有 $g'(x)=(-1,0)$. 这将推出 $(-1,0)\in\partial g(0,0)$. 由集合 $\partial g(0,0)$ 的凸性可得 $(0,0)\in\partial g(0,0)$. 故原点是 g 的临界点.

进一步，还可得到下面的

定理 1 设 $X=R^n$，$n\geqslant 2$，$f\in C^{1-0}(X,R)$. 那么对于 X 中的每个点 x_0，都存在 x_0 处的某个 C^{1-0} 局部坐标变换 $T:U\to V$，使得 $T^{-1}(x_0)$ 成为 $f\circ T$ 的临界点.

证明 任取 $x_0\in X$. 若已有 $0\in\partial f(x_0)$，则不需再证. 若 $0\notin\partial f(x_0)$，则由[4]中定理 9.9，存在 x_0 处的 C^{1-0} 局部坐标变换 $T_1:U\to V$，使得 $T_1^{-1}(x_0)=0\in U\subset R^n$，且 $f_1=f\circ T_1$ 在 U 中有形式

$$f_1(x)=x_1,\quad\forall\, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in U.$$

不妨设 U 为 0 的球形邻域. 表 $R^n=R^2\times R^{n-2}$. 设 $T:R^2\to R^2$ 为前面例子中所述. 定义 $\tilde{T}:R^n\to R^n$ 为

$$\tilde{T}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(T(x_1,x_2),x_3,\cdots,x_n).$$

则 $\tilde{T}:R^n\to R^n$ 是 C^{1-0} 同胚. 令 $g=f_1\circ\tilde{T}=f\circ(T_1\circ\tilde{T})$. 易见 $0=(T_1\circ\tilde{T})^{-1}(x_0)$ 是 g 的临界点. 证

毕.

上面的例子与定理 1 指出了定义 4 的不合理性,因此我们摒弃定义 4. 在 C^{1-0} 范畴中自当去研究 C^{1-0} 泛函的具有在 C^{1-0} 坐标变换下的不变性的临界点. 于是下述定义便是自然的.

定义 5 设 $f\in$ 是 $C^{1-0}(X,R)$, $x_0\in X$ 是 f 的临界点. 若对于 x_0 处的每个是 C^{1-0} 局部坐标变换 $T:U\to V$,(其中, V 是 x_0 的开邻域, U 是 X 中的开集, $T:U\to V$ 是同胚,且 T 与 T^{-1} 均是 C^{1-0} 的), $T^{-1}(x_0)$ 均是 $f\circ T$ 的临界点,则称 x_0 是 f 的本质临界点. 否则,临界点 x_0 称为非本质的.

定义 6 设 $(M,\mathfrak{D})$ 是 C^{1-0}-Banach 流形, $f\in C^{1-0}(M,R)$, $x_0\in M$. 若存在 x_0 处的某个局部坐标系 $(U,\varphi)\in\mathfrak{D}$,使得 $\varphi(x_0)$ 是 $f\circ\varphi^{-1}$ 的本质临界点,则称 x_0 为 f 的本质临界点.

注记 1 定义 6 显然与 x_0 处的局部坐标系的选取无关,因而是合理的. 定义 6 中的点 x_0 本应就称做 f 的临界点,但由于已有了公认的定义 1,而 X 自然也可视为是 C^{1-0} 流形,为免混乱,在定义 6 中使用了本质临界点的术语. 至于定义 1,在把 X 理解为是 C^1 流形的意义下它是合理的,因为由[1]定理 I.2.3.10 所述的链规则可知,定义 1 中的临界点概念具有 C^1 坐标变换下的不变性. 与此相应,对于 C^1 流形上的 C^{1-0} 泛函可象通常(如定义 4 所示)那样合理地定义临界点的概念.

由于非本质临界点在某个 C^{1-0} 局部坐标变换下可化为正则点,因此 C^{1-0} 泛函在非本质临界点处的局部拓扑性态同在正则点处的情形处没有差别.

对于 C^1 泛函的孤立临界点定义有临界群的概念(见[5]). 设 M 是 C^1 流形, $f\in C^1(M,R)$, $x_0\in M$ 是 f 的孤立临界点, $f(x_0)=c$. 记 $f_c=\{x\in M: f(x)\leqslant c\}$. 任取 x_0 的邻域 U. 则相对奇异同调群 $H_*(f_c\cap U, f_c\cap U\setminus\{x_0\})$ 称为 x_0 的临界群. 现在,当 M 是 C^{1-0} 流形, $f\in C^{1-0}(M,R)$ 时,对于任意的 $x_0\in M$(不管 x_0 是不是什么临界点),如果均按上述方法定义 x_0 的临界群,那么,按照这种术语,注意到同调群的拓扑不变性及正则点的临界群的平凡性,便得到

定理 2 设 M 是 C^{1-0}-Banach 流形, $f\in C^{1-0}(M,R)$, $x_0\in M$,若 x_0 不是 f 的本质临界点,则 x_0 的临界群是平凡的.

上述一些情况提示我们,在 C^{1-0} 范畴中 C^{1-0} 泛函的本质临界点才是与 C^1 范畴中 C^1 泛函的临界点相应的类似物. 因此研究 C^{1-0} 泛函的本质临界点是有意义的. 下面我们仅给出这方面的几个最简单的结果.

由于局部极值点具有局部同胚不变性,故有

定理 3 C^{1-0} 泛函的局部极值点均是本质临界点. 特别, X 上的连续凸泛函或凹泛函的临界点是本质临界点.

由[1]中定理 I.2.6.6 所述的链规则可得下述

定理 4 设 M 是 n 维 C^{1-0} 流形, $f\in C^{1-0}(M,R)$, $x\in M$. 若存在 x_0 处的某个局部坐标系 (U,φ),使得 $\partial(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(x_0))=\{0\}$,则 x_0 是 f 的本质临界点,且这时对 x_0 处的任一局部坐标系 (U_a,φ_a),均有 $\partial(f\circ\varphi_a^{-1})(\varphi_a(x_0))=\{0\}$. 特别, R^n 上的 C^1 泛函的临界点总是本质的.

定理 5 设 M 是 C^1-Banach 流形, $f\in C^{1-0}(M,R)$, $\{x_n\}\subset M$ 是 f 的一列本质临界点,且 $x_n\to x_0\in M$. 那么 x_0 是 f 的本质临界点.

证明 利用 x_0 处的局部坐标系,不妨就考虑 $M=X$ 的情形. 假若 x_0 不是 f 的本质临界点,则存在 x_0 的邻域 V, X 中的开集 U 与 C^{1-0} 同胚 $T:U\to V$,使得 $T^{-1}(x_0)$ 是 $g=f\circ T:U\to R$ 的

正则点，即 $0\notin\partial g(T^{-1}(x_0))$. 这将推出存在 x_0 的某邻域 $W\subset V$，使得当 $x\in W$ 时，$T^{-1}(x)$ 均是 g 的正则点. 这样，序列 $\{x_n\}$ 中含于 W 中的点就将是非本质临界点. 这同假设条件矛盾. 定理得证.

我们将在另外的文章中考虑 C^{1-0} 泛函的极小极大型本质临界点.

最后我们建议，当 x_0 是 C^{1-0} 泛函 f 的本质临界点时，使用记号 $0\in[\partial f(x_0)]$.

Clarke 广义梯度有较理想的分析学上的性质，但是，正如史树中在[6]中所指出的，它也有不尽人意之处，即集合 $\partial f(x)$ 往往过大，条件. $0\in\partial f(x)$ 过于粗糙，其中水份太多. 本文中提出本质临界点的概念旨在对之做点去伪存真的工作. 对于本质临界点的特性与判别法有待于更深入的研究.

参 考 文 献

[1] F. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley and Sons, 1983.

[2] K. C. Chang, *Variational methods for nondifferentiable functionals and their application to PDE*, J. Math. Anal. Appl., 80(1981), 102—129.

[3] G. De Cecco and G. Palmieri, *On the regularity of eigenfunctions of the Laplace operator on a Lipschitz manifold*, J. Math. pures et appl. 68(1989), 121—134.

[4] 陈文嵘、范先令，隐函数定理，兰州大学出版社，1986.

[5] 张恭庆，临界点理论及其应用，上海科学技术出版社，1986.

[6] 史树中，非光滑分析，数学进展，15:1(1986), 9—21.

The Essentially Critical Points of Lipschitz Functionals

Fan Xianling

(Department of Mathematics, Lanzhou University)

Abstract

We show that, in general, Clarke critical points of C^{1-0} (i.e. locally Lipschitz) functionals in Banach spaces do not possess the invariance property under C^{1-0} local coordinate transformations. We then introduce the concept of the essentially critical points of C^{1-0} functionals, which can be used to study C^{1-0} functions on C^{1-0} manifolds. We obtain some results related to the essentially critical points.

Keywords Banach spaces, Lipschitz manifolds, Lipschitz functionals, critical points.