第14卷第4期
1994年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 14 No. 4
Nov. 1994

一般赋范空间上连续函数的 Korovkin 型定理*

朱文革
(复旦大学数学研究所,上海 200433)

摘　要　本文引入一种连续模的新的控制泛函,利用直接方法(避免使用 K-泛函)得到了一般赋范空间上连续函数的 Korovkin 型定理,得到的结果与 H. Gonska 用 K-泛函得到的结果相比各有优点.

关键词　极小凹控制(least concave majorant),极小右控制(least right majorant),Korovkin 型定理.

§1　引　言

本文考虑 $C(X)$ 上的有界线性算子,特别的是正有界线性算子的 Korovkin 型定理. 这里 $C(X)=C((x,d))$ 表示定义在紧测度空间 (x,d) 上的实值连续函数全体,定义其上的范数为 $\|f\|=\|f\|_x=\max\{|f(x)|:x\in X\}$,我们还假设 X 的直径 $d(X)>0$.

对一般正线性有界算子的 Korovkin 型定理,R. Mamedov 考虑了 $X=[a,b]$ 并配有欧氏度量的情况[Ma]对空间 (x,d) 是凸的情况(凸的意义见[Me]),D. Newan 和 M. Shapiro[NS] 证明了类似的结论,对具有凸形变系数 $\rho<\infty$ 时,M. Pozo 推广了[NS]中的结果[Po],以后 H. Gonska 利用连续模的极小凸控制又给出了下述一般紧测度空间上的推广[Go1][Go2].

定理A　令 A 具有形式 $A(f,y)=\psi_A(y)f(g_A(y))$,又设 L 为一有界线性算子,A,L 都表示 $C(X)$ 到 $B(Y)$ 的有界线性算子,ψ_A 为 Y 上的有界函数,g_A 为 Y 到 X 的映照,当 $f\in C(X)$,$y\in Y$ 及 $\varepsilon>0$ 时,则有

$$
\begin{aligned}
|(L-A)(f,y)| \leqslant & \max\{\frac{1}{2}[\|L\|+\|L(1_x)\|_Y], \\
& \varepsilon^{-1}[d(x)(\|\varepsilon_y\circ L\|-L(1_x,y))+|L(d(,g_A(y)),y)|]\tilde{\omega}(f,\varepsilon) \\
& +|(L-A)(1_x,y)||f(g_A(y))|,
\end{aligned}
$$

这里 1_x 表示函数 $X\ni x\mapsto 1\in R$,ε_y 表示算子 $C(Y)\ni f\mapsto f(y)\in R$,$\tilde{\omega}(f,\varepsilon)$ 表示 $\omega(f,\varepsilon)$ 的极小凹控制,也即,

$$
\tilde{\omega}(f,\varepsilon)=\begin{cases}\sup\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant \varepsilon\leqslant y\leqslant d(x)\\ x\neq y}}\dfrac{(\varepsilon-x)\omega(f,y)+(y-\varepsilon)\omega(f,x)}{y-x}, & \text{当 } 0\leqslant\varepsilon\leqslant d(X) \text{ 时},\\ \omega(f,d(X)), & \text{当 } \varepsilon>d(X) \text{ 时},\end{cases}
$$

* 1991年9月21日收到. 93年6月19日收到修改稿.

Gonska 的证明利用了某类 K 泛函，因此是非直接的，本文引入了一种连续模的新的控制，改进了 Pozo 的直接方法从而得到了一般紧测度空间上的 Korovkin 型定理，我们的结论和定理 A 相比各有优劣.

§2 一些定义和性质

本节我们引入连续模的一种新的控制泛函，并讨论其性质.

定义 2.1 所谓连续模 $\omega(f,\varepsilon)$ 的右控制 $\hat{\omega}(f,\varepsilon)$ 定义为：

$$\tilde{\omega}(f,\varepsilon)=\begin{cases}\sup\limits_{\varepsilon\leqslant y}\dfrac{\varepsilon\omega(f,y)}{y}, & \text{当 } 0\leqslant\varepsilon\leqslant d(X)\text{ 时},\\ \omega(f,d(X)), & \text{当 } \varepsilon>d(X)\text{ 时}.\end{cases}$$

由 $\tilde{\omega}(f,\varepsilon)$ 的定义易知 $\omega(f,\varepsilon)\leqslant\tilde{\omega}(f,\varepsilon)$，反过来 $\tilde{\omega}(f,\varepsilon)$ 一般不能用 $\omega(f,\varepsilon)$ 控制，也即不存在 $c>0$，使得 $\tilde{\omega}(f,\varepsilon)\leqslant\omega(f,\varepsilon)$ 对 $\forall f\in c(X)$ 成立. 我们有下面的反例.

例 2.2 令 $X=[0,0.25]\cup[0.75,1]$，$d(x,y)=|x-y|$，则函数 $f(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 0.25\\ 2 & \text{当 } 0.75\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$ 时在 X 上连续，其连续模及右控制为 $\omega(f,\varepsilon)=\begin{cases}0 & \text{当 } 0\leqslant\varepsilon<0.5\\ 1 & \text{当 } 0.5\leqslant\varepsilon<1\end{cases}$ 时，$\hat{\omega}(f,\varepsilon)=\min(2\varepsilon,1)$. 故 $\tilde{\omega}(f,\varepsilon)\leqslant c\omega(f,\varepsilon)$，对 $\forall c>0,\varepsilon\geqslant 0$ 都不成立.

虽然有上述反例，但在下述引理条件下，则能得到反向的控制.

引理 2.3 设 (X,d) 为紧度量空间，且对 $\forall\xi,\varepsilon>0$，及 $f\in C(X)$ 都存在固定 $\eta>0$ 使得 $\omega(f,\xi\varepsilon)\leqslant(1+\eta\xi)\omega(f,\varepsilon)$ 成立，则对 $f\in C(X)$ 有：

(1) $\omega(f,\xi\varepsilon)\leqslant\hat{\omega}(f,\xi\varepsilon)\leqslant(1+\eta\xi)\omega(f,\varepsilon)$，特别的当 $\xi=1$ 时有

(2) $\omega(f,\varepsilon)\leqslant\hat{\omega}(f,\varepsilon)\leqslant(1+\eta)\omega(f,\varepsilon)$，更特别当 $\eta=1$ 时，则有

(3) $\omega(f,\varepsilon)\leqslant\hat{\omega}(f,\varepsilon)\leqslant 2\omega(f,\varepsilon)$.

证明 当 ξ 或 ε 等于 0 时(1)式显然成立，当 $\xi,\varepsilon>0$ 时，如 $\xi\varepsilon\leqslant d(X)$，由定义：

$$\hat{\omega}(f,\xi\varepsilon)=\sup_{\xi\varepsilon\leqslant y\leqslant d(X)}\frac{\xi\varepsilon\omega(f,y)}{y}\leqslant\sup_{\xi\varepsilon\leqslant y\leqslant d(X)}\frac{\xi\varepsilon}{y}\left(1+\eta\frac{y}{\varepsilon}\right)\omega(f,\varepsilon)\leqslant(1+\eta\xi)\omega(f,\varepsilon)$$

如 $\xi\varepsilon>d(X)$，则有 $\hat{\omega}(f,\xi\varepsilon)=\omega(f,d(X))\leqslant\left(1+\eta\dfrac{d(X)}{\varepsilon}\right)\omega(f,\varepsilon)\leqslant(1+\eta\xi)\omega(f,\varepsilon)$ □

满足引理 2.3 条件的紧度量空间是很多的，例如，有 Menger 引入的紧凸空间，此时 $\eta=1$；又如 Pozo 引入的具凸形变系数 $\rho>0$ 的紧度量空间，此时 $\eta=\rho$. 下面我们比较 $\hat{\omega}(f,\varepsilon)$ 和 $\tilde{\omega}(f,\varepsilon)$，由定义显然有 $\hat{\omega}(f,\varepsilon)\leqslant\tilde{\omega}(f,\varepsilon)$，下面的例子对两者从定量上作一些比较.

例 2.4 令 $X=[0,2]$，$d(x,y)=|x-y|$，$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\in[0,1]\\ x & x\in[1,2]\end{cases}$ 时，此时 $\omega(f,\varepsilon)=\begin{cases}\sqrt{\varepsilon} & \varepsilon\in[0,1]\\ & \varepsilon\in[1,2]\end{cases}$，$\hat{\omega}(f,\varepsilon)\omega(f,\varepsilon)$，$\tilde{\omega}(f,\varepsilon)$ 的计算比较复杂，这里只对一些具体数 $\hat{\omega}(f,1)$ 和 $\tilde{\omega}(f,1)$，$\hat{\omega}(f,\frac{1}{2})$ 和 $\tilde{\omega}(f,\frac{1}{2})$，$\hat{\omega}(f,\frac{3}{2})$ 与 $\tilde{\omega}(f,\frac{3}{2})$ 作一些比较. 实际上，此时有

$$\tilde{\omega}(f,1)=\frac{\sqrt{2}+3}{3},\qquad \hat{\omega}(f,1)=1;$$

$$\tilde{\omega}(f,\frac{1}{2})=\frac{5}{7}, \qquad \hat{\omega}(f,\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tilde{\omega}(f,\frac{3}{2})\geqslant\frac{\sqrt{2}+8}{6}, \qquad \hat{\omega}(f,\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

一般来说 $\hat{\omega}(f,\varepsilon)$确实比 $\tilde{\omega}(f,\varepsilon)$更精细地控制 $\omega(f,\varepsilon)$.

主要结果及证明

定理 3.1 设(X,d)为一紧度量空间,A具有形式$A(f,y)=\psi_A(y)f(g_A(y))L$为有界线性算子,$A$与$L$都是$C(X)$到$B(Y)$的有界线性算子,如$y\in Y$且$L(|_x,y)\neq0$.时则对$f\in C(X)$及$\varepsilon>0$有:

$$\begin{aligned}|(L-A)(f,y)|\leqslant&\|\varepsilon_y\circ L\|(1-\frac{(1_X,y)}{\|\varepsilon_y\circ L\|})\max(1,\varepsilon^{-1}d(X))\\&+\frac{(|L(1_X,y)|}{L(1_X,y)\|\varepsilon_y\circ L\|}L(\max(|,\varepsilon^{-1}d(\cdot,g_A(y)),y))\hat{\omega}(f,\varepsilon)\\&+|(L-A)(1_X,y)||f(g_A(y)|.\end{aligned}$$

证明 当$f\in C(X)$时,则对$\forall\ t\in X$有$|f(t)-f(g_A(y))|\leqslant\max\{1,\frac{d(t,g_A(y))}{\varepsilon}\}\hat{\omega}(f,\varepsilon)$,这里函数$\max\{1,\frac{d(t,g_A(y))}{\varepsilon}\}=1+\max\{0,\frac{d(t,g_A(y))}{\varepsilon}-1\}=1+\frac{1}{2}(\frac{d(t,g_A(y))}{\varepsilon}-1+|\frac{d(t,g_A(y))}{\varepsilon}-1|)$.故$\max\{1,\frac{d(t,g_A(y))}{\varepsilon}\}$是$X$上的连续函数.

对固定的$y\in Y$,当$t\in X$时定义:

$$h_1(t):=f(g_A(y)-\max(1,\frac{d(t,g_A(y))}{\varepsilon})\hat{\omega}(f,\varepsilon),$$

$$h_2(t):=f(g_A(y)+\max(1,\frac{d(t,g_A(y))}{\varepsilon})\hat{\omega}(f,\varepsilon).$$

对连续函数$h_i,i=1,2$,显然有$h_i(t)\leqslant f(t)\leqslant h_2(t)$且有$|f(t)-h_i(t)|=f(t)-h_1(t)=f(t)-f(g_A(y))+\max((1,\frac{d(t,g_A(y))}{\varepsilon})\hat{\omega}(f,\varepsilon)\leqslant|f(t)-f(g_A(y))|+\max((1,\frac{d(t,g_A(y))}{\varepsilon})\hat{\omega}(f,\varepsilon)\leqslant2\max(1,\frac{d}{\varepsilon})\hat{\omega}(\varepsilon)$,

这里令$\hat{\omega}(\varepsilon)=\hat{\omega}(f,\varepsilon),d=d(t,g_A(y))$下文同此.同理有$|h_2(t)-f(t)|\leqslant2\max(1,\frac{d}{\varepsilon})\hat{\omega}(\varepsilon)$.因此$\max\{\|f-h_i\|,i=1,2\}\leqslant2\max(1,\frac{d(X)}{\varepsilon}))\hat{\omega}(f,\varepsilon)$.这里$d(X)$表示$X$的直径.

由假设$L(1_X,y)\neq0$,(也即$\|\varepsilon_y\circ L\|\neq0$)故可引入下述泛函$T,T(f):=T_y(f)=\frac{|L(1_X,y)|}{L(1_X,y)\|\varepsilon_y\circ L\|}L(f,y)$,则对固定$y$,$T(f)$是$C(X)$上的连续线性泛函,由Riesz表示定理,$T(f,y)=\int_X fd\mu$,并且$\mu=\mu^+-\mu^-$,其中$\mu^+,\mu^-$都是正测度.故$T(f,y)=\int_X fd\mu^+-\int_X fd\mu^-$,因此对$\forall\ f\in C(X)$有$T(f,y)+\int_X fd\mu^-=\int_X fd\mu^+\geqslant0$,我们估计$\int_X fd\mu^-$如下

$$\int_X fd\mu^-\leqslant\int_X 1_Xd\mu^-\|f\|_X=\|f\|_X\int_X 1_Xd(\sup(-\mu,0))$$

$$= \| f \|_X \int_X 1_X d(\frac{1}{2}(-\mu + |\mu|)) = \| f \|_X \frac{1}{2}(\int_X 1_X d(-\mu) + \int_X 1_X d|\mu|)$$
$$= \| f \|_X \frac{1}{2}(T(1_X, y) + \| \mu \|).$$

这里

$$\| \mu \| = \sup\{|\int_X f d\mu| : f \in C(X), \| f \|_X \leqslant 1\} = \sup\{|T(f,y)| : f \in C(X), \| f \|_X \leqslant 1\}$$
$$= \| \varepsilon_y \circ T \|.$$

因此有 $0 \leqslant T(f,y) + \int_X f d\mu^- \leqslant T(f,y) + \| f \|_X \frac{1}{2}(-T(x,y) + \| \varepsilon_y \circ T \|)$. 即 $T(f,y) \geqslant -\| f \|_X \frac{1}{2}(-T(1_X,y)) + \| \varepsilon_y \circ T \|)$. 故由 $T(f,y) \geqslant -\| f \|_X \frac{1}{2}(-T(1_X,y)) + \| \varepsilon_y \circ T \|)$, 得 $T(f) + \| f \|_X \frac{1}{2}(1-M) \geqslant 0$,这里 $M := \frac{|l(1_x,y)|}{\| \varepsilon_y \circ L \|} \leqslant 1$.

将上述不等式用于 $f-h_1, h_2-f$ 即得

$$T(f-h_1) + \| f-h_1 \| \frac{1}{2}(1-M) \geqslant 0 \text{ 及 } T(h_2-f) + \| h_2-f \| \frac{1}{2}(1-M) \geqslant 0,$$

故有 $T(f) - f(g_A(y))T(1_X) \geqslant -\| f-h_1 \| \frac{1}{2}(1-M) - T(\max(1, \frac{d}{\varepsilon}))\hat{\omega}(\varepsilon) \geqslant -\max(\| f-h_i \|, i=1,2)\frac{1}{2}(1-M) - T(\max(1,\frac{d}{\varepsilon}))\hat{\omega}(\varepsilon)$,同理有

$$T(f) - f(g_A(y))T(1_X) \leqslant \max(\| f-h_i \|, i=1,2)\frac{1}{2}(1-M) + T(\max(1,\frac{d}{\varepsilon}))\hat{\omega}(\varepsilon),$$

故有 $|T(f) - f(g_A(y))T(1_X)| \leqslant (1-M)\max(1, \frac{d(X)}{\varepsilon}\hat{\omega}(\varepsilon) + T(\max(1,\frac{d}{\varepsilon}))\hat{\omega}(f,\varepsilon)$.

由 T 的定义得

$$|(L-A)(f,y)| \leqslant |L(f,y) - L(1_X,y)f(g_A(y))| + |(L-A)(1_X,y)||f(g_A(y)|$$

且有

$$|L(f,y) - L(1_X,y)f(g_A(y))| = \| \varepsilon_y \circ L \| \, |T(f) - f(g_A(y))T(1_X)|$$
$$\leqslant \| \varepsilon_y \circ L \| [(1-M)\max(1, \varepsilon^{-1}d(X)) + \frac{L(1_X,y)|}{L(1_X,y)\| \varepsilon_y \circ L \|} L(\max(1,\frac{d}{\varepsilon}))]\hat{\omega}(\varepsilon)$$
$$= ((\| \varepsilon_y \circ L \| - |l(1_X,y))\max(1,\varepsilon^{-1}d(X)) + \frac{L(1_X,y)|}{L(1_X,y)} L(\max(1,\frac{d}{\varepsilon}),y))\hat{\omega}(\varepsilon)$$

由上式易得定理 □

我们有下述推论:

推论 3.2 (1) 由定理 3.1 中的条件,可得

$$|(L-A)(f,y)| \leqslant (\| \varepsilon_y \circ L \| - |L(1_X,y)|)\max(1,\varepsilon^{-1}d(X))$$
$$+ |L(\max(1,\varepsilon^{-1}d(\cdot, g_A(y)),y)|)\hat{\omega}(f,\varepsilon) + |(L-A)(1_X,y)||f(g_A(y)|.$$

(2) 当 L 为正有界线性算子时,则有 $\| \varepsilon_y \circ L \| = |L(1_X,y)|$,上式变为 $|(L-A)(f,y)| \leqslant L(\max(1,\varepsilon^{-1}d(\cdot, g_A(y)),y)\hat{\omega}(f,\varepsilon) + |(L-A)(1_X,y)||f(g_A(y)|$.

推论 3.3 当 (x,d) 为紧度量空间满足对 $\forall\ \xi,\varepsilon > 0, f \in C(X)$ 有 $\omega(f,\xi\varepsilon) \leqslant (1+\eta\xi)\omega(f,\varepsilon)$. 其中 $\eta > 0$ 为固定常数,且定理 3.1 中条件满足则有

$$|(L-A)(f,y)| \leqslant |(L-A)(1_X,y)||f(g_A(y)| + \{(\| \varepsilon_y \circ L \| - |L(1_X,y)|)$$
$$\cdot \max(1,h^{-1}d(X)) + L(\max(1,d(\cdot, g_A(y))h^{-1}),y)\}(1+\eta h\varepsilon^{-1})\omega(f,\varepsilon).$$

证明 由推论 3.2 中(1)及引理 2.3,由此得 $\hat{\omega}(f,h)=\hat{\omega}(f,h\varepsilon^{-1}\varepsilon)\leqslant(1+\eta h\varepsilon^{-1})\omega\varepsilon$,立即得证.

注 1 对正有界线性算子,不用定理 3.1,推论 3.2 也容易得到,实际上我们有

$$|(L-A)(f,y)|\leqslant|L(f,y)-(1_X,y)f(g_A(y))|+|(L-A)(1_X,y)||f(g_A(y)|.$$

只要估计右式中第一项,由 $|f(t)-f(g_A(y))|\leqslant\max(1,\frac{d}{\varepsilon})\hat{\omega}(\varepsilon)$. 由 L 正性故 $|L(f,y)-L(1_X,y)\cdot f(g_A(y))|\leqslant\max(1,\frac{d}{\varepsilon})\hat{\omega}(\varepsilon)$ 即得.

注 2 定理 3.1 及推论也可用在 Bernstein 和 Hermite-Fejer 等算子上得到其逼近定理.

注 3 我们比较定理 3.1 及定理 A,说明它们各有优劣. 也即不能互相推出. 我们令 $X=Y,f=1,A=Id,L(1_X,x)=1$ 对某个 $x\in X$ 成立,由定理 A 得

$$|L(f,x)-f(x)|\leqslant\max(1,\varepsilon^{-1}L(d(\cdot,x),x)\tilde{\omega}(f,\varepsilon).$$

由推论 3.2 得 $|L(f,x)-f(x)|\leqslant L(\max(1,\varepsilon^{-1}d(\cdot,x)),x)\tilde{\omega}(f,\varepsilon)$,如果 $f\in C(X)$ 使得 $\hat{\omega}(f,\varepsilon)=\tilde{\omega}(f,\varepsilon)$,则第一个估计较精确,如果 $f\in C(X)$ 使得 $\hat{\omega}(f,\varepsilon)=\frac{1}{2}\tilde{\omega}(f,\varepsilon)$. 则第二个估计较精确.

参 考 文 献

[1] H. Gonska, *On approximation in spaces of continuous function*, Bull. Austral. Math. Soc. 28, 1983, 411—432.

[2] H. Gonska, *Quantitative korovkin type theorems on simultaneous approximation*, Math Z, 186, 1984, 419—433.

[3] K. Mamedov, *On the order of approximation of functions by linear positive operators*, Dokl Akad Nauk USSR 128, 1959, 674—676.

[4] K. Menger, Math. Ann 100, 75—163, FdM 1928, 622.

[5] D. Newman-H. Shapiro, *Jackson's theorem in higher dimension in:on Approximation Theory*, 1963, 208—219.

[6] M. Pozo, *Déformation de la convexité et théorèmes du type.*

The Korovkin-type Theorem on the Compact Metric Spaces

Zhu Wenge

(Institute of Math., Fudan University)

Abstract

In this paper we define a new majorant of the modalus of continuity and get a Korovkin-type theorem on the compact metric space by direct technique. We also compare our result with the theorem of H. Gmska which was originally proved via K-functional.

Keywords least concave majorant, least right majorant, Korovkin-type theorem.