第14卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 14 No. 4
1994年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1994

自然数划分中一种新约束*

那履弘　　娄惠元
(沈阳黄金学院，110015)

自然数 n 分为 m 个部分的一个划分的定义是 n 的一种形如 $n=n_1+n_2+\cdots+n_m$ 的表示，其中自然数 n_i 满足 $n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_m\geqslant 1$. 由划分给出的 $n_1,\cdots,n_m$ 称为项. 我们用 $P(n,m)$ 表示将 n 分成 m 个部分的划分种数. 文献[1],[2],[3]给出了一些基本结果. 如果进一步设 $n_1>n_2>\cdots>n_m\geqslant 1$，满足这一约束条件的划分种数用 $Q(n,m)$ 表示. 这一约束条件也可表示为：$|n_i-n_j|\geqslant 1, i,j=1,2,\cdots,m$. 如果引用约束条件的概念，那么一般划分的约束条件仅为：$|n_i-n_j|\geqslant 0$. 对以上两种划分的约束条件进行推广，得出这类一般约束条件的表达式为：$|n_i-n_j|\geqslant c$，其中 $c\geqslant 0$，称之为指标为 c 的项间差约束. 在这种约束下的划分种数用 $P_c(n,m)$ 表示，我们证明了下面结果.

定理 1　将 n 划分为 m 个自然数之和，在指数为 c 的项间差的约束下，划分种数

$$P_c(n,m)=\begin{cases}P_c(n-cm+c-1,m-1)+P_c(n-m,m), & \text{当 } n>k \text{ 时}\\ 1, & \text{当 } n=k \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } n<k \text{ 时}\end{cases}$$

这里 $k=m+\dfrac{cm(m-1)}{2}$，$P_c(n,0)=1$.

定理 2　在对 n 的划分中 $P_c(n,m)=P_d(n-(c-d)\dfrac{m(m-1)}{2},m)$，特别令定理 1 中的 $c=1$，即得出 $Q(n,m)=Q(n-m,m)+Q(n-m,m-1)$，其中 $Q(n,m)=P_1(n,m)$. 这正是 Platner(1888) 得到的结果.

在定理 2 中令 $c=1, d=0, m=3$，则得

$$Q(n,3)=P(n-3,3).$$

利用 $Q(n,3)=[\dfrac{n^2-6n+12}{12}]$ 可推出简单计算式

$$P(n,3)=[\frac{(n+3)^2-6(n+3)+12}{12}]=[\frac{n^2+3}{12}].$$

参 考 文 献

[1] M. L. Targhetta, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 37, 1967, 1—7.

[2] I. Tomescu，组合学引论(中译本)，高等教育出版社，1985.

* 1991 年 10 月 31 日收到. 94 年 5 月 31 日收到修改稿.