系统 $\dot{x}=\psi(y),\dot{y}=-g(x)-f(x)y$ 的极限环唯一性问题*

陈秀东 (大连理工大学，116024)

索光俭 (长春师范学院，1? 32)

摘 要 本文给出系统 $\dot{x}=\psi(y),\dot{y}=-g(x)-f(x)y$ 条件较弱的极限环唯一性定理.

关键词 常微分方程，极限环，唯一性.

本文在文[1]的基础上对系统

$$\dot{x}=\psi(y),\dot{y}=-g(x)-f(x)y \tag{E}$$

给出条件更弱些的极限环唯一性定理，它是文[1]的发展.

定理 (E)定义在$[-a,b;-c,d]$(a,b,c,d 皆为正数)上，且 ψ,f 和 g 都是连续可微的，$y\psi(y)>0(y\neq0)$，$\frac{d\psi}{dy}>0$，$xg(x)>0\ (x\neq0)$，同时满足：

i) 当$-a<x<x_0<0$时，$f(x)<0$；当 $x_0<x<b$ 时，$f(x)>0$；

ii) 方程组 $F(u)+e=F(v)$，$\frac{g(u)}{f(u)}=\frac{g(v)}{f(v)}$在$-a<u<x_0,x_0<v<b$ 上对任意常数 e 至多有一组解，这里 $F(x)=\int_0^x f(s)ds$，

则方程(E)至多存在一个极限环；若存在，它是不稳定的.

证明 如文[1]，记 $p=F(x)$在$[x_0,b]$和$[-a,x_0]$上的反函数分别是 $x_1(p)$和 $x_2(p)$. 用变换

$$T:\ x=x_i(p),\ y=y,\ i=1,2.$$

来变换方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-g(x)-f(x)y}{\psi(y)},$$

有

$$\frac{dy}{dp}=\frac{1}{\psi(y)}\left(-\frac{g(x_1(p))}{f(x_i(p))}-y\right)=f_i(p,y). \tag{E$_i$}$$

设 Γ 是(E)的任意一个极限环，要证唯一性，只需证

$$\oint_\Gamma \operatorname{div}(E)dt=\oint_\Gamma(-f(x))dt>0,$$

这里积分是沿顺时针方向的.

对 xy 平面上，$x=x_0$ 把 Γ 分为 Γ_1(右)及 Γ_2(左)两部分，Γ_1 上 x 坐标最大值 x_1 的点为 c_1，Γ_2 上 x 坐标最小值 x_2 的点为 c_2. $\Gamma_i(i=1,2)$以 c_i 为界点分成上下两半部分，记为 $\Gamma_{ij}(j=1,2)$，见图 1. 在变换 T 下，在 py 平面上对应部分对应地记为 $\overline{\Gamma}_i$ 和 $\overline{\Gamma}_{ij}$. 由[1]和 $\overline{\Gamma}_i$ 在 py 平面的相对

* 1992年5月12日收到.

位置如图 2 所示. 点 c_i 对应点 $\bar{c}_i$, x_i 对应 $p_i=F(x_i)$, 且不妨 $p_1<p_2$. 记 $\bar{\Gamma}_{ij}$ 的方程为 $y_{ij}(p)=Y_j(x_i(p))$, 此处 $Y_j(x)$ 是 Γ 的上下两半部分的方程.

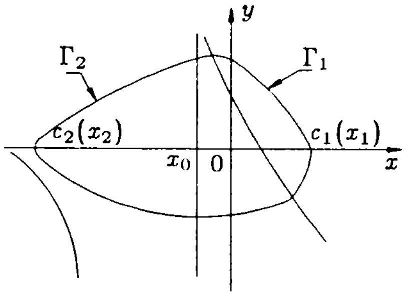

图 1

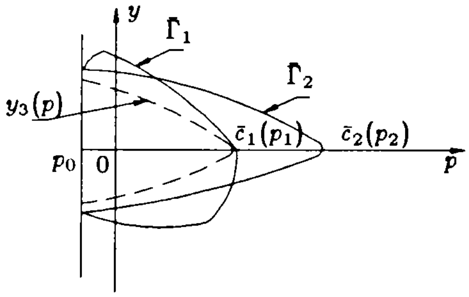

图 2

记沿 Γ 上半部分的发散量积分为 I_1, 则有

$$I_1=\int_{\Gamma_{21}}(-f(x))dt+\int_{\Gamma_{11}}(-f(x))dt=\int_{x_2}^{x_0}\frac{(-f(x))dx}{\psi(Y_1(x))}+\int_{x_0}^{x_1}\frac{(-f(x))dx}{\psi(Y_1(x))}$$

$$=\int_{p_2}^{p_0}\frac{-dp}{\psi(Y_1(x_2(p)))}+\int_{p_0}^{p_1}\frac{-dp}{\psi(Y_1(x_1(p)))}=\int_{p_0}^{p_2}\frac{dp}{\psi(y_{21}(p))}-\int_{p_0}^{p_1}\frac{dp}{\psi(y_{11}(p))}. \tag{1}$$

现证 $I_1>0$. 令 $p=z-p_1+p_2$, 并记

$$y_{21}(z-p_1+p_2)=y_{31}(z),\quad p_0\leqslant z\leqslant p_1,$$

显然有 $y_{21}(p)=y_{31}(p-p_1+p_2)$. 此处 $y_{31}(z)$ 是方程

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{\psi(y)}\left[-\frac{g(x_2(z-p_1+p_2))}{f(x_2(z-p_1+p_2))}-y\right]$$

的解, 于是有

$$\int_{p_0}^{p_1}\frac{dz}{\psi(y_{31}(z))}=\int_{p_0-p_1+p_2}^{p_2}\frac{dp}{\psi(y_{31}(p-p_1+p_2))}=\int_{p_0-p_1-p_2}^{p_2}\frac{dp}{\psi(y_{21}(p))}.$$

注意到 $p_0-p_1+p_2>0$ 及积分值与积分变量无关, 就有

$$\int_{p_0}^{p_2}\frac{dp}{\psi(y_{21}(p))}=\left(\int_{p_0}^{p_0-p_1+p_2}+\int_{p_0-p_1+p_2}^{p_2}\right)\frac{dp}{\psi(y_{21}(p))}=\int_{p_0}^{p_0-p_1+p_2}\frac{dp}{\psi(y_{21}(p))}+\int_{p_0}^{p_1}\frac{dp}{\psi(y_{31}(p))}.$$

代入 I_1 的表达式(1), 得

$$I_1=\int_{p_0}^{p_0-p_1+p_2}\frac{dp}{\psi(y_{21}(p))}+\int_{p_0}^{p_1}\left[\frac{1}{\psi(y_{31}(p))}-\frac{1}{\psi(y_{11}(p))}\right]dp. \tag{2}$$

由于 $\psi(y_{21}(p))>0$ 及 $p_0-p_1+p_2>p_0$, 可知(2)中第一项积分为正. 为证明(2)中第二项积分也为正, 只须证明第二项积分的被积函数为正即可. 为此, 在定理条件下, 我们证明: 当 $p_0<p<p_1$ 时, 有 $0<y_{31}(p)<y_{11}(p)$. 由于 $y_{31}(p)$ 及 $y_{11}(p)$ 分别是方程

$$\frac{dy}{dp}=\frac{1}{\psi(y)}\left[-\frac{g(x_2(p-p_1+p_2))}{f(x_2(p-p_1+p_2))}-y\right]=f_3(p,y)$$

和

$$\frac{dy}{dp}=\frac{1}{\psi(y)}\left[-\frac{g(x_1(p))}{f(x_1(p))}-y\right]=f_1(p,y)$$

的解. 根据条件 i)及 $xg(x)>0\ (x\neq 0)$，知当 $0<p-p_0\ll 1$ 时，有

$$\frac{g(x_2(p-p_1+p_2))}{f(x_2(p-p_1+p_2))}>0>\frac{g(x_1(p))}{f(x_1(p))}$$

因此，当 $0<p-p_0\ll 1$ 时，

$$f_3(p,y)<f_1(p,y). \tag{3}$$

由定理条件 ii)知方程

$$\frac{g(x_2(p-p_1+p_2))}{f(x_2(p-p_1+p_2))}=\frac{g(x_1(p))}{f(x_1(p))} \tag{4}$$

至多存在一个零点. 若在 (p_0,p_1) 上(4)无零点，则(3)对于 $p\in(p_0,p_1)$ 上任何点均成立，注意到 $y_{11}(p_0)=y_{21}(p_0)>y_{31}(p_0)$，因此在 (p_0,p_1) 上有 $y_{31}(p)>y_{11}(p)$. 若在 (p_0,p_1) 上(4)有唯一零点 p^*，则在 (p^0,p^*) 上有 $f_3(p,y)<f_1(p,y)$ 和 $y_{31}(p_0)<y_{11}(p_0)$，于是在 (p_0,p^*) 上有 $y_{31}(p)<y_{11}(p)$. 在 (p^*,p_1) 上，$f_3(p,y)>f_1(p,y)$ 及 $y_{31}(p_1)=y_{11}(p_1)$，故也有 $y_{31}(p)<y_{11}(p)$. 这样一来，注意到 $\frac{d\psi}{dy}>0$，就有 $\psi(y_{31}(p))<\psi(y_{11}(p))$. 于是有

$$\int_{p_0}^{p_1}\left[\frac{1}{\psi(y_{31}(p))}-\frac{1}{\psi(y_{11}(p))}\right]dp>0.$$

由(2)可知 $I_1>0$. 同理可知沿 Γ 下半面的积分也大于零.

综上有 $\oint_\Gamma \operatorname{div}(E)dt=\oint_\Gamma(-f(x))dt>0$. 证完.

参 考 文 献

[1] 索光俭、陈秀东，系统(E)：$\dot{x}=\psi(y),\dot{y}=-g(x)-f(x)y$ 极限环的唯一性，数学研究与评论，Vol. 14, No. 1, 1994.

Uniqueness Problem of Limit Cycle of System $\dot{x}=\psi(y),\dot{y}=-g(x)-f(x)y$

Chen Xiudong

(Inst. of Math. Sciences, Dalian University of Technology)

Suo Guangjian

(Dept. of Math., Changchun Teacher's College)

Abstract

In this paper, we present uniqueness theorem of limit cycle of system $\dot{x}=\psi(y),\dot{y}=-g(x)-f(x)y$. The result improves and extends the result in [1].

Keywords ordinary differential equation, limit cycle, uniqueness.