第 14 卷第 4 期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 14 No. 4
1994 年 11 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1994

QF 环性质向扩环上的传递*

杨 存 洁

(首都师范大学数学系，北京 100037)

摘　要　设环 A 是环 B 的扩环(记作 A/B)，B 是 QF 环. 在本文中我们将证明在以下四种情形下 A 也是 QF 环：(1) ${}_BA$ 是有限生成自由的且 A/B 是投射扩张. (2) A/B 是 Frobenius 的. (3) A/B 是可离且平坦的. (4) A/B 是 H-可离的.

关键词　QF 环，投射扩张，Frobenius 扩张，可离扩张，平坦，H- 可离扩张.

讨论 QF 条件向上传递这个问题本质上是研究链条件和自内射条件的向上传递. 本文 1. 1，2. 1，3. 3，4. 3 分别研究了在不同条件下链条件和自内射条件向上传递的情形.

在本文中，所有的环都是有单位元的. 所有的模都是幺模，${}_RM$ 表示环 R 上的左模范畴，$B\subset A$ 总是表示 A 是 B 的扩环且 A，B 有公共单位元.

1. ${}_BA$ 是有限生成自由的且 A/B 是投射扩张

定义 1. 1　一个环 A 如果满足条件：${}_AA$ 是 Noether 模，又是内射模，则称 A 是 Quasi-Frobenius 环. 简称 QF 环. QF 环是左右对称的.

命题 1. 1　设 $B\subset A$，B 是 Noether 环，${}_BA$ 是 B 上有限生成模，则 A 也是 Noether 环(见[5]).

定理 1. 1(Baer 判别定理. 见[1])　以下条件等价：

(a)　$A\in{}_RM$ 是内射模；

(b)　对任意 R 上的左理想 $I\leqslant{}_RR$ 和任意左 R-模同态 $\alpha:I\to A$ 存在左 R-模同态 $\beta:R\to A$. 使右图交换.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\alpha"'] & R \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

由定理 1. 1 我们可以证明下面命题：

命题 1. 2　若 M 是左 B-内射模，则 $\mathrm{Hom}({}_BA,{}_BM)$是左 A-内射模.

证明　因为 M 是左 B-模，则 $\mathrm{Hom}({}_BA,{}_BM)$是左 A-模：

$$\forall\ h\in\mathrm{Hom}({}_BA,{}_BM),\ \forall\ a\in A,x\in{}_BA(ah)x:=h(xa).$$

据 Baer 判别法别，任取 $\mathscr{U}$ 为 A 的左理想，$f\in\mathrm{Hom}({}_A,\mathscr{U},{}_A\mathrm{Hom}({}_BA,{}_BM))$，$\eta:\mathscr{U}\to A$ 是嵌入映射. 我们要求得一个 $g\in\mathrm{Hom}({}_AA.\ {}_A\mathrm{Hom}({}_BA,{}_BM))$，使得 $g\eta=f$.

任取 $u\in\mathscr{U}$，由定义 $f(u)\in{}_A\mathrm{Hom}({}_BA,{}_BM)$，所以 $f(u)(1_A)=a_u\in M$，令 $\varphi(u)=a_u$，则 φ 是由 $\mathscr{U}$ 到 M 的一个映射，容易验证 φ 是 B-同态，所以 $\varphi\in\mathrm{Hom}(\mathscr{U},M)$.

因为 M 是 B-内射，则存在 $\psi:A\to M$ 使 $\varphi=\psi\eta$ 成立. $\forall\ a\in A$，令 $g(a)=a\psi\in{}_A\mathrm{Hom}({}_BA,{}_BM)$，则 $g\eta(u)=g(u)=u\varphi$，而且 $(g\eta(u))(a)=(u\psi)(a)=\psi(au)=\psi\eta(au)=\varphi(au)=f(au)(1_A)=(af(u))$

* 1991 年 9 月 24 日收到. 94 年 4 月 20 日收到修改稿.

$(1_A)=f(u)(1_A a)=f(u)(a)$. 故 $g\eta(u)=f(u)\Rightarrow g\eta=f$，这里 g 是左 A 同态. □

定义 1.2 $B\subset A$. A 叫左 B-投射扩张，是指对任意$_AV$ 和任意$_AW\leqslant {_AV}$. 由$_BW<\oplus {_BV}$（即$_BW$ 是$_BV$ 的直和项）可推出$_AW<\oplus {_AV}$.

命题 1.3 设$_BA$ 是 B 上有限生成自由的投射扩张. 若$_BB$ 是内射的，则$_AA$ 是内射的.

证明 $_BA$ 是 B 上有限生成自由的，则有$_BA\cong B\oplus\cdots\oplus B$，由于$_BB$ 内射，则$_BA$ 是左 B-内射的. 考虑下面同态：

$$l:\ {_AA}\to {_A\mathrm{Hom}}({_BA},{_BA}),\ l(a)(x):=xa,\forall\ a\in {_AA},\forall\ x\in {_BA}.$$

易见 l 是左 A-同态. 考虑下面映射：

$$K:{_A\mathrm{Hom}}({_BA},{_BA})\to {_AA},\ K(f):=f(1).$$

易知 K 是 B-同态，且 $Kl=I_A$，因此 l 是 B-模分裂单的，则$_BA$ 是$_B\mathrm{Hom}({_BA},{_BA})$的直和项，又因为 A 是 B 上投射扩张，于是$_AA$ 是$_A\mathrm{Hom}({_BA},{_BA})$的直和项. 因为$_BA$ 是左 B-内射. 由命题 1.2 知 $_A\mathrm{Hom}({_BA},{_BA})$是左 A-内射. 因此$_AA$ 是 A-内射. □

命题 1.4 设$_BA$ 是 B 上有限生成自由的投射扩张，则 B 是 QF 环$\Rightarrow A$ 是 QF 环.

证明 由命题 1.1 及命题 1.3 直接可得. □

由简单的直和论证，不难得出下面结果.

命题 1.5 设$_BA$ 是 B 上有限生成投射模且是 B-投射扩张，则 B 是 QF 环$\Rightarrow A$ 是 QF 环.

QF 条件的向上传递也可以通过相对同调维数和 Faith-Walker 定理（见[1]）得到.

2. A 在 B 上是 Frobenius 的

命题 2.1 设$_BA$ 是 B 上 Frobenius 扩张，则 B 是 QF 环$\Rightarrow A$ 是 QF 环.

证明 由 Frobenius 扩张定义知$_AA\cong {_AA^*}:=\mathrm{Hom}({_BA},{_BB})$由$_BB$ 内射知$_A\mathrm{Hom}({_BA},{_BB})$是 A-内射$\Rightarrow {_AA}$ 是 A-内射. 又$_BA$ 是有限生成投射的，$\exists$ A' 使得 $A'\oplus A\cong B^n$ 因为 B 是 Noether$\Rightarrow B^n$ 是 Noether$\Rightarrow {_BA}$ 是 Noether$\Rightarrow A$ 是 Noether 环. 因此 A 是 QF 环. □

3. A 在 B 上的可离且平坦的

定义 3.1 A 是 B 的可离扩张，如果 A-A-双模同态：

$$\pi:A\underset{B}{\otimes}A\to A,\quad \pi(x\otimes y):=xy,\ \forall\ x,y\in A$$

是分裂的.

C. Faith 和 E. Walker 证明了

命题 3.1 A 是 QF 环$\Leftrightarrow$任意内射左 A-模是 A-投射的.

从而我们有：

命题 3.2 $_AM$ 是左 A-内射，A_B（或$_BA$）平坦，则：$_BM$ 是左 B-内射.

证明 设 $0\to {_BM}\xrightarrow{f}{_BN}$ 正合，又因为 A_B 平坦则考虑下面 A-正合列：

$$0\to {_AA}\otimes_B M\xrightarrow{\varphi-1\otimes f}{_AA}\underset{B}{\otimes}N,$$

作投射 p 及入射 q：

$$p:\quad A\underset{B}{\otimes}M\to M\qquad\qquad q:\quad N\to A\underset{B}{\otimes}N$$
$$a\otimes m\to m\qquad\qquad\qquad n\to 1\otimes n$$

而$_A(A\otimes_BM)\cong {_AM}$ 这里 $i(a\otimes m):=am$. 因为$_AM$ 内射，所以$\exists$ $\varphi:{_A(A\otimes_BN)}\to {_AM}$ 是左 A-同态，

使图交换 $i=\varphi\psi$. 有 $(i^{-1}\varphi)\psi=1_{A\otimes_B M}$. 即 $0\to A\otimes_B M\to A\otimes_B N$ 是 A-分裂. $i^{-1}\varphi \overset{\text{id}}{=} \psi^{-1}$, $\exists\ pi^{-1}\varphi q: {}_BN\to {}_BM$ 使 $\forall\ m\in {}_BM$. 有 $pi^{-1}\varphi qf(m)=pi^{-1}\varphi q(f(m))=pi^{-1}\varphi(1\otimes f(m))=p(1\otimes m)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}_BM \arrow[r, "f"] & {}_BN \arrow[d, "q"] \\
0 \arrow[r] & {}_A(A\otimes_B M) \arrow[u, "p"] \arrow[r, "1\otimes f"] \arrow[d, "i"] & {}_A(A\otimes_B N) \arrow[dl, dotted, "\varphi"] \\
 & {}_AM &
\end{tikzcd}$$

$=m$ 即 $pi^{-1}\varphi qf=1_M$. 因此 $0\to {}_BM\xrightarrow{f}{}_BN$ 分裂, 于是 ${}_BM$ 是左 B-内射. □

引理 3.1 A 是 B 的可离扩张, $\forall\ m\in {}_AM$, 则

M 是 B-投射 $\Rightarrow M$ 是 A-投射, M 是 B-内射 $\Rightarrow M$ 是 A-内射.

证明 令 M 是左 A-模. 考虑下面两个同态显然它们是 A-同态:

$$\pi_M:\quad {}_AA\otimes_B M\to M,\qquad l_M:\quad M\to \mathrm{Hom}({}_BA,{}_BM),$$
$$\pi(x\otimes m)=xm;\qquad l_M(m)(x)=xm.$$

对于 $\forall\ x\in A, m\in M$, 因为 A 在 B 上可离, 存在着 $\sum x_i\otimes y_i\in(A\otimes_B A)^A$ 且 $\sum x_iy_i=1$. 我们定义同态:

$$\varphi_M:\quad M\to A\otimes_B M,\qquad K_M:\quad \mathrm{Hom}({}_BA,{}_BM)\to M,$$
$$\varphi_M(m)=\sum x_i\otimes y_im;\qquad K_M(f)=\sum x_if(y_i).$$

$\forall\ m\in M, f\in \mathrm{Hom}({}_BA,{}_BM)$, 显然 φ_M, K_M 是左 A-同态, 且 $\pi_M\circ\varphi_M=1_M$, $K_M\circ l_M=1_M$, 则如果 M 是 B-投射, 那么 $A\otimes_B M$ 是 A-投射. 因为 π_M 分裂, 那么 M 是 A-投射. 如果 M 是 B-内射, 则 $\mathrm{Hom}({}_BA,{}_BM)$ 是 A-内射, 由于 l_M 分裂, 那么 M 是 A-内射. □

命题 3.3 A 是 B 的可离扩张, A 是右(或左) B-模平坦的, 则 B 是 QF 环 $\Rightarrow A$ 是 QF 环.

证明 令 M 是任意内射左 A-模, 因为 A 是右 B-平坦的, 由命题 3.2 知, M 是左 B-内射的, 又因为 B 是 QF 环时, 由命题 3.1 知, M 是 B-投射. 又因为 A 是 B 上可离扩张, 由引理 3.1 知 M 是 A-投射. 据命题 3.1 知, A 是 QF 环. □

4. A 是 B 上 H-可离扩张

定义 4.1 A 是 B 的 H-可离扩张, 是指 ${}_AA\otimes_B A_A$ 同构于 A 的同构像的有限直和的直和项(作为 A-A-模). 即存在 A-A-同态 $F: A\otimes_B A\to A\oplus\cdots\oplus A$ 和存在 A-A-同态 $G: A\oplus\cdots\oplus A\to A\otimes_B A$ 使得 $GF=1_{A\otimes_B A}$

命题 4.1 下面陈述等价:

(a) $1\otimes 1\in(A\otimes_B A)^AD$ 在 $A\otimes_B A$ 中, 这里 $D=V_A(B)$. (b) A 是 B 的 H-可离扩张.

命题 4.2 设 A 是 B 的 H-可离扩张, B 是 A 的作为左 B-模的直和项, 则

(1) $\mathrm{Hom}({}_BA,{}_BB)$ 是左 A-模生成子; (2) A' 是右 B-模有限生成的.

证明 令 $1\otimes 1=\sum x_{ij}\otimes y_{ij}$ 这里 $\sum x_{ij}\otimes y_{ij}\in(A\otimes_B A)^A$, $d_{ij}\in D$, $i=1,2,\cdots,n$. 因为 B 是 A 的左 B-直和项, 则存在一个左 B-同态 $p: A\to B$ 有 $p(1)=1$.

(1) 我们有自然 A-A-同态

$$\theta: A\otimes_B A\to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}({}_BA,{}_BB)_B, A_B),\ \theta(x\otimes y)(f)=xf(y),\ \forall\ x,y\in A\ f\in \mathrm{Hom}({}_BA,{}_BB).$$

令 $\theta(\sum x_{ij}\otimes y_{ij})=a_i$ 且 $\forall\ ja_i\circ p=f_i$ 也是一个左 B-同态 $d_i\in D$. 另一方面, 因为 $(\sum x_{ij}\otimes y_{ij}\in$

$(A\underset{B}{\otimes}A)^A$，$x\alpha_i=\alpha_i\circ x$，$\forall\, x\in A$，即 α_i 是 A-B-同态．现在 $\theta(1\otimes 1)=\sum\alpha_i\circ d_i$，于是有 $1=1p(1)=\theta(1\otimes 1)(p)=(\sum\alpha_i\circ d_i)(p)=\sum\alpha_i(d_i\circ p)=\sum\alpha_i(f_i)$，$\alpha_i\in\mathrm{Hom}({}_A\mathrm{Hom}({}_BA,{}_BB),{}_AA)$，$f_i\in\mathrm{Hom}({}_BA,{}_BB)$．故 $\mathrm{Hom}({}_BA,{}_BB)$是左 A-生成子．

(2) $\forall\, x\in A$ 有 $x\otimes 1=\sum x_{ij}\otimes y_{ij}d_i$，$x\otimes 1=x\otimes p(1)=(I\otimes p)(x\otimes 1)=(I\otimes p)(\sum x_{ij}\otimes y_{ij}xd_i)=\sum x_{ij}\otimes p(y_{ij}xd_i)$．因为 A 是 B 的 H-可离扩张，它必是可离扩张，于是 $\varphi: A\otimes A\to A$，$\varphi(x\otimes y)=xy$ 是 A-A-同态，有 $x=\sum x_{ij}p(y_{ij}xd_i)$．这里 $p(y_{ij}xd_i)\in B$，则 $A=\sum x_{ij}B$． □

定理 4.1 (Bass-Papp) 设 A 是环，以下陈述等价：

(a) A 是左 Noether 环． (b) 对任意内射左模族 $\{E_i\}_{i\in I}$，是$\oplus E$ 是内射模． (c) 对任意可数内射左模族 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$，则$\bigoplus_{i=1}^{\infty}E_i$ 是内射模．

命题 4.3 令 A 是 B 的 H-可离扩张，则 B 是 QF 环$\Rightarrow A$ 是 QF 环．

证明 因为${}_BB$ 是左 B-内射$\Rightarrow{}_A\mathrm{Hom}({}_BA,{}_BB)$是左 A-内射．因为 B 是 QF 环$\Rightarrow{}_BB$ 及 B_B 内射$\Rightarrow$正合列 $0\to{}_BB\to{}_BA$($0\to{}_BB\to A_B$)分裂，于是 B 是 A 的左(右)B-直和项，由命题 4.2 知 A 是右(左)B-有限生成的$\Rightarrow A$ 是 Noether 环．由定理 4.1 知$\bigoplus_{i\in I}{}_A\mathrm{Hom}({}_BA,{}_BB)$是 A-内射，又由命题 4.2 (1)知${}_A\mathrm{Hom}({}_BA,{}_BB)$是范畴${}_AM$ 的生成子，因此有$\bigoplus_{i\in I}{}_A\mathrm{Hom}({}_BA,{}_BB)\to{}_AA\to 0$ 是正合的，又因为${}_AA$ 是投射模，故它分裂，于是${}_AA$ 是它的左 A-直和项．因此${}_AA$ 内射，故 A 是 QF 环．

参 考 文 献

[1] F. Kash, *Modules and Rings*, Academic Press, 1982.

[2] K. Nakane, *Note on separable extensions of rings*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku 10(1969), 142—145.

[3] K. Sugano, *Separable extensions of Quasi-Frobenius rings*, Hokkaido (1975).

[4] K. Sugano, *Separable extensions and Frobenius extensions*, Osaka, J. Math 7(1970), 291—299.

[5] O. Zariski and P. Samuel, Commutative algebra, Vol. I.

[6] 陈家鼐，环与模，北京师范学院出版社(1989).

[7] 周伯埙，同调代数，科学出版社(1989).

On a Hereditary Property of QF Rings

Yang Cunjie

(Dept. of Math., Capital Normal University, Beijing)

Abstract

Let ring A be an extension of ring B with B a QF ring. In this paper, we show that A is also a QF ring if one of the following condition is satisfied: (1) ${}_BA$ is a finitely generated free module and A/B is a projective extension. (2) A/B is a Frobenius extension. (3) A/B is a separable extension and ${}_BA$ is a flat module. (4) A/B is an H-separable extension.