第14卷第4期
1994年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 14 No. 4
Nov. 1994

环的弱正则性*

李 方
(东南大学数力系，南京 210018)

摘 要 本文给出了环的弱正则性的一个充要条件，还讨论了 Munn 环的弱正则性. 最后对环的半格和及补半格和，给出了弱正则性的刻画.

关键词 环，弱正则性，Munn 环，半格和.

1 引 言

环 R 称为弱正则的[1]，若对任意 $a\in R$，存在 $x\in R^1aR^1$ 使 $a=xa$. 据[2]，环 R 是弱正则的当且仅当是完全左幂等的，即对任一左理想 L，有 $L^2=L$.

本文将给出弱正则环的一个刻画，然后对 Munn 环以及环的半格和与补半格和，研究其弱正则性的条件. 为此下述两定理将是重要的.

定理 A[1] 令 R 是环，A 是 R 的任何理想，则 R 是弱正则环当且仅当 R/A 和 A 都是弱正则环.

定理 B[3] 令 R 是环，n 是任意正整数，则 R 是弱正则环当且仅当 $M_n(R)$ 是弱正则环. 这里 $M_n(R)$ 表示 R 上 $n\times n$ 全矩阵环.

在[4]中，作者利用定理 A 和 B，广泛研究了半群环的弱正则性.

环 R 是弱正则的当且仅当对任何 $r\in R$，有 $r\in R^1rR^1r$. 这个等价叙述在讨论问题时使用较方便.

2 一个充要条件

引理 2.1 设 $x\in R$，$y\in R^1xR^1$，$x'=x-yx$. 若存在 $a\in R^1x'R^1$ 使 $x'=ax'$，则存在 $b\in R^1xR^1$ 使 $x=bx$.

证明 $x=x'+yx=ax'+yx=a(x-yx)+yx=(a-ay+y)x$. 令 $b=a-ay+y$. 由于 $a\in R^1x'R^1=R^1(x-yx)R^1\subseteq R^1xR^1$，$ay\in R^1xR^1$，$y\in R^1xR^1$，故 $b\in R^1xR^1$ 且 $x=bx$.

定理 2.2 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是含 环 R 的正交幂等元且 $e_1+\cdots+e_n=1$. 那么 R 是弱正则环当且仅当对任何 $i,j\in\langle n\rangle$ 和 $x\in e_iRe_j$，存在 $y\in e_iRxRe_i$ 使 $x=yx$.

证明 必要性 R 是弱正则环，因此存在 $z\in RxR$ 使 $x=zx$. 令 $y=e_ize_i\in e_iRxRe_i$，则

* 1992年7月10日收到. 94年4月收到修改稿.

$$yx = e_i z e_i x = e_i z x = e_i x = x.$$

充分性 当 $n=1$ 结论显然. 当 $n=2$, 先取 $x\in R$ 使 $e_1xe_2=0$. 据条件, 存在 $y\in e_1Re_1xe_1Re_1$ 使 $e_1xe_1=ye_1xe_1$; 存在 $z\in e_2Re_2xe_2Re_2$ 使 $e_2xe_2=ze_2xe_2$. 由于 e_1,e_2 是正交的, 故 $ye_2=0$, $ze_1=0$, 从而 $(y+z)x=(y+z)(e_1+e_2)x(e_1+e_2)=ye_1xe_1+ze_2xe_2+ze_2xe_1=e_1xe_1+e_2xe_2+zxe_1\in R^1xR^1$. 令 $x'=x-(y+z)x$, 则 $x'=(e_1+e_2)x(e_1+e_2)-(y+z)x=e_2xe_1-zxe_1=e_2(x-zx)e_1=e_2(x'+yz)e_1=e_2x'e_1\in e_2Re_1$(因为 $e_2y=0$). 因此据条件, 存在 $w\in e_2Rx'Re_2$ 使 $x'=wx'$. 据引理 2.1, 存在 $v\in R^1xR^1$ 使 $x=vx$.

对一般的 $x\in R$(即未必 $e_1xe_2=0$), 据条件, 存在 $y\in e_1Re_1xe_2Re_1$ 使 $e_1xe_2=ye_1xe_2$, 但 $ye_1xe_2=e_1yxe_2$, 故 $e_1xe_2=e_1yxe_2$, 得 $e_1(x-yx)e_2=0$. 因此据前段讨论, 存在 $u\in R^1(x-yx)R^1$ 使 $x-yx=u(x-yx)$. 但 $y\in RxR$, 故据引理 2.1, 存在 $b\in R^1xR^1$ 使 $x=bx$.

综上可知, R 是弱正则环.

假定对 $n=k-1(k\geqslant 3)$ 结论成立, 考虑 $n=k$ 的情况. 记 $f=e_2+e_3+\cdots+e_k$, $g=e_1+e_3+e_4+\cdots+e_k$, 则由归纳假定, fRf 与 gRg 都是弱正则环(分别以 f,g 为 元).

(i) 取 $x\in e_1Rf$. 则 $xe_2\in e_1Re_2$, 从而存在 $y\in e_1Rxe_2Re_1$ 使 $xe_2=yxe_2$, 得 $(x-yx)e_2=0$, 于是 $x-yx=(x-yx)(g+e_2)=(x-yx)g$. 但 $g(x-yx)=gx-gyx=ge_1x-ge_1yx=e_1x-e_1yx=x-yx$, 故 $x-yx=g(x-yx)g\in gRg$. 由于 gRg 是弱正则环, 故存在 $z\in gRg(x-yx)gRg$ 使得 $x-yx=z(x-yx)$. 据引理 2.1, 存在 $w\in RxR$ 使 $x=wx$ 从而 $x=e_1x=e_1wx=e_1we_1x$. 令 $w_1=e_1we_1$, 则 $w_1\in e_1RxRe_1$ 且 $x=w_1x$ 对于 $x\in e_1Rf$.

(ii) 令 $x\in fRe_1$. 则 $e_2x\in e_2Re_1$ 从而有 $y\in e_2Re_2xRe_2$ 使 $e_2x=ye_2x=e_2yx$, 得 $e_2(x-yx)=0$, 故 $x-yx=(g+e_2)(x-yx)=g(x-yx)$. 但 $(x-yx)g=xe_1g-yxe_1g=xe_1-yxe_1=x-yx$, 于是 $x-yx=g(x-yx)g\in gRg$. 由于 gRg 是弱正则的, 故存在 $z'\in gRg(x-yx)gRg$ 使 $x-yx=z'(x-yx)$. 据引理 2.1, 存在 $w'\in R^1xR^1$ 使 $x=w'x$, 从而 $x=fx=fw'x=fw'fx$. 令 $w_2=fw'f$, 则 $w_2\in fRxRf$ 且 $x=w_2x$ 对于 $x\in fRe_1$.

由于 $f+e_1=1$ 且 f 和 e_1 是正交幂等元, 因此由(i)和(ii)的结论, 再利用 $n=2$ 时的结论, 可知 R 是弱正则的. 因而结论对 $n=k$ 时成立.

作为定理 2.2 的运用, 我们对含 环给出定理 B 的一个新证明:

只需证明必要性. 设 R 的 元 1, 令

$$E_i=\begin{array}{c}\begin{matrix} & & & i & & & \end{matrix}\\ \begin{pmatrix}0 & & & & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 0 & & & & \\ & \cdots & \cdots & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0\end{pmatrix}_{n\times n}\end{array}$$

则 $\sum_{i=1}^{n}E_i=\Delta_n$ ($n\times n$ 单位阵) 且 $E_i(i=1,\cdots,n)$ 是一组正交幂等元. 任取 $X=(x_{lk})_{n\times n}\in E_iM_n(R)E_j$, 则 $x_{ij}\in R$, 而 $x_{lk}=0$ 当 $l\in\langle n\rangle\backslash\{i\}$ 或 $k\in\langle n\rangle\backslash\{j\}$. 由于 R 是弱正则环, 存在 $y\in Rx_{ij}R$ 使 $yx_{ij}=x_{ij}$. 令 $Y=(y_{st})_{n\times n}$, 其中 $y_{ii}=y$; 当 s 或 $t\in\langle n\rangle\backslash\{j\}$ 时 $y_{st}=0$. 易见 $X=YX$. 令 $y=\sum_m u_mx_{ij}v_m$, 其中 $u_m,v_m\in R$, 则 $Y=$

$$\begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & y & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} = \sum_{i} i \begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & u_m & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & x_{\cdot j} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} i \cdot \begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & v_m & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} z$$，其中 $\begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & u_m & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} \in E_i M_n(R)$，$\begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & v_m & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} \in M_n(R)E_i$，故 $Y \in E_i M_n(R) X M_n(R) E_i$，因此据定理 2.2，$M_n(R)$ 是弱正则的.

3 Munn 环的弱正则性

本节研究环 R 与其 Munn 环 $M(R;I,\Lambda;P)$ 的弱正则性之间的联系.

令 R 是环，I 和 Λ 是指标集，P 是 R 上 $\Lambda\times I$ 矩阵. 用 $M(R;I,\Lambda;P)$ 表示 R 上所有 $I\times\Lambda$ 有界矩阵(即至多有限个非零元的矩阵)构成的加法群并在其中定义乘法. 使对 $A,B\in M(R;I,\Lambda;P)$ 有 $A\circ B=APB$. 易见 $M(R;I,\Lambda;P)$ 是一个环，称为 **R 上以 P 为夹心阵的 $I\times\Lambda$ Munn 环**[5]，简称 **Munn 环**. Munn 环是全矩阵环的一种推广，有广泛的应用.

引理 3.1 设 R 是弱正则环，I 和 Λ 是指标集，A 是 R 上 $I\times\Lambda$ 有界矩阵，用 $M_{\Lambda\times I}(R)$ 表示 R 上所有 $\Lambda\times I$ 矩阵之集，则 $A\in M_{I\times I}(R)AM_{\Lambda\times I}(R)A$.

证明 存在 $I_0\subset I$，$\Lambda_0\subseteq\Lambda$ 使 $|I_0|<+\infty$，$|\Lambda_0|<+\infty$ 且 A 的非零元(若存在)都在子矩阵 $A_{I_0\times\Lambda_0}$ 中. 分情况讨论：

(i) $|I_0|=|\Lambda_0|=n$. 由定理 B，$M_n(R)$ 是弱正则环，故

$$A_{I_0\times\Lambda_0}\in M_n(R)A_{I_0\times\Lambda_0}M_n(R)A_{I_0\times\Lambda_0}=M_{I_0\times I_0}(R)A_{I_0\times\Lambda_0}M_{\Lambda_0\times I_0}(R)A_{I_0\times\Lambda_0}.$$

(ii) $|I_0|=m<|\Lambda_0|=n$. 令 $A'=\begin{pmatrix}A_{I_0\times\Lambda_0}\\ O_{n-m,n}\end{pmatrix}\in M_n(R)$，则由 $M_n(R)$ 是弱正则的，存在 $B_l,C_l\in M_n(R)$ 使 $A'=\sum_l B_lA'C_lA'$. 令 $B_l=(B_l'B_l'')$，$C_l=(C_l'C_l'')$，其中 $B_l',C_l'\in M_{n\times m}(R)$，$B_l'',C_l''\in M_{n\times(n-m)}(R)$. 则 $A'=\sum_l(B_l'B_l'')\begin{pmatrix}A_{I_0\times\Lambda_0}\\ 0\end{pmatrix}(C_l'C_l'')\begin{pmatrix}A_{I_0\times\Lambda_0}\\ 0\end{pmatrix}=\sum_l B_l'A_{I_0\times\Lambda_0}C_l'A_{I_0\times\Lambda_0}$. 又令 $B_l'=\begin{pmatrix}B_l^*\\ B_l^{**}\end{pmatrix}$，其中 $B_l^*\in M_{m\times m}(R)$，$B_l^{**}\in M_{(n-m)\times m}(R)$，则

$$A_{I_0\times\Lambda_0}=\sum_l B_l^*A_{I_0\times\Lambda_0}C_l'A_{I_0\times\Lambda_0}\in M_{I_0\times I_0}(R)A_{I_0\times\Lambda_0}M_{\Lambda_0\times I_0}(R)A_{I_0\times\Lambda_0}.$$

(iii) $|I_0|=m>|\Lambda_0|=n$. 令 $A'=(A_{I_0\times\Lambda_0}O_{m\times(m-n)})\in M_m(R)$，则由 $M_m(R)$ 是弱正则的，存在 $B_l,C_l\in M_m(R)$ 使 $A'=\sum_l B_lA'C_lA'$. 令 $C_l=\begin{pmatrix}C_l'\\ C_l''\end{pmatrix}$，其中 $C_l'\in M_{n\times m}(R)$，$C_l''\in M_{(m-n)\times m}(R)$. 则 $A'=\sum_l B_l(A_{I_0\times\Lambda_0}0)\begin{pmatrix}C_l'\\ C_l''\end{pmatrix}(A_{I_0\times\Lambda_0}0)=\sum_l(B_lA_{I_0\times\Lambda_0}C_l'A_{I_0\times\Lambda_0}0)$. 故

$$A_{I_0\times\Lambda_0}=\sum_l B_lA_{I_0\times\Lambda_0}C_l'A_{I_0\times\Lambda_0}\in M_{I_0\times I_0}(R)A_{I_0\times\Lambda_0}M_{\Lambda_0\times I_0}(R)A_{I_0\times\Lambda_0}.$$

据(i),(ii),(iii),必有 $A_{I_0\times\Lambda_0}\in M_{I_0\times I_0}(R)A_{I_0\times\Lambda_0}M_{\Lambda_0\times I_0}(R)A_{I_0\times\Lambda_0}$,因此 $A\in M_{I\times I}(R)AM_{\Lambda\times I}(R)A$.

引理 3.1 的逆命题成立,即,若对任何有界阵 $A\in M_{I\times\Lambda}(R)$ 有 $A\in M_{I\times I}(R)AM_{\Lambda\times I}(R)A$,则 R 是弱正则的.事实上,对任 $a\in R$,令 $A=(a_{i\lambda})_{I\times\Lambda}$ 其中 $a_{i_0\lambda_0}=a$, $a_{i\lambda}=0$ 当 $i\in I\backslash\{i_0\}$, $\lambda\in\Lambda\backslash\{\lambda_0\}$,则存在 $B_l=(b_{ij}^{(l)})_{I\times I}$, $C_l=(c_{\lambda i}^{(l)})_{\Lambda\times I}$,使 $A=\sum\limits_l B_lAC_lA$.因此 $a=a_{i_0\lambda_0}=\sum\limits_l b_{i_0i_0}^{(l)}a_{i_0\lambda_0}c_{\lambda_0i_0}^{(l)}a_{i_0\lambda_0}\in R^1aR^1a$.

定理 3.2 令 R 含 环及 Munn 环 $M=M(R;I,\Lambda;P)$,则(i)当 M 是弱正则环时,R 是弱正则环;(ii)当 R 是弱正则环且 P 是可逆阵时,M 是弱正则环.

证明 (i)由引理 3.1 的逆命题即得.(ii)据引理 3.1,对任何 $A\in M$,

$$A\in M_{I\times I}(R)AM_{I\times\Lambda}(R)A=M_{I\times I}(R)P^{-1}PAPP^{-1}M_{\Lambda\times I}(R)P^{-1}PA$$
$$\subseteq M_{I\times\Lambda}(R)\circ A\circ M_{I\times\Lambda}(R)\circ A.$$

易见,定理 B 成为定理 3.2 的推论.

对 $|I|=|\Lambda|=n<+\infty$ 的情况,我们有:

命题 3.3 对含 弱正则环 R,若 $M(R;n,n;P)$ 是弱正则环,则 P 是 $M_n(R)$ 中的左可逆矩阵.

证明 单位阵 $\Delta_n\in M\circ\Delta_n\circ M\circ\Delta_n=MP^2MP$,故存在 $B\in MP^2M$ 使 $\Delta_n=BP$. □

由命题 3.3 和定理 3.2 知,要使 $M(R;n,n;P)$ 是弱正则环,R 须是弱正则环,并且 P 须是介于可逆阵和左可逆阵之间的某种矩阵.但 P 究竟该为什么样的左可逆阵,这有待于考察.

4 (补)半格和的弱正则性

定义[6] (i) 环 R 称为子环 $R_\alpha(\alpha\in Y)$ 的**半格和**,若 Y 是半格,$R=\sum\limits_{\alpha\in Y}R_\alpha$ 且 $R_\alpha R_\beta\subseteq R_{\alpha\beta}$; (ii) 环 R 称为子环 $R_\alpha(\alpha\in Y)$ 的**补半格和**,若 R 是 $R_\alpha(\alpha\in Y)$ 的半格和且对任 $\alpha\in Y$, $R_\alpha\cap\sum\limits_{\beta\neq\alpha}R_\beta=0$.

本节讨论环的半格和及补半格和的弱正则性.

引理 4.1 (i) 若 R 是其弱正则子环 R_α,R_β 的半格和,则 R 是弱正则环; (ii) 若 $R=R_\alpha+R_\beta$ 是补半格和且 R 是弱正则环,则 R_α 和 R_β 是弱正则环.

证明 (i) $\{\alpha,\beta\}$ 构成半格,即 $\alpha\beta=\beta\alpha=\alpha$ 或 $\alpha\beta=\beta\alpha=\beta$.不妨设 $\alpha\beta=\beta\alpha=\beta$,则 $R_\alpha R_\beta\subseteq R_{\alpha\beta}=R_\beta$, $R_\beta R_\alpha\subseteq R_\beta$,即 R_β 是 R 的理想,因此 $R_\alpha/(R_\alpha\cap R_\beta)\cong R/R_\beta$(第二同构定理).于是据定理 A,因 R_α 是弱正则环,故 R/R_β 是弱正则环,又由 R_β 是弱正则的,知 R 是弱正则环.

(ii) 由已知 $R_\alpha\cap R_\beta=0$,故 $R_\alpha\cong R/R_\beta$.据定理 A,R_α 和 R_β 是弱正则环.

引理 4.2[6] 假定环 R 是子环 $R_\alpha(\alpha\in Y,|Y|>1)$ 的(补)半格和.那么,对 Y 的非零元 α_0,存在 Y 的真子半格 A,B,满足 $A\cup B=Y$, $A\cap B=\varnothing$,使后述条件成立:(i) $R_A=\sum\limits_{\alpha\in A}R_\alpha$ 是子环 $R_\alpha(\alpha\in A)$ 的(补)半格和,R_{α_0} 是 R_A 的理想; (ii) $R_B=\sum\limits_{\alpha\in B}R_\alpha$ 是子环 $R_\alpha(\alpha\in B)$ 的(补)半格和,R_B 是 R 的理想; (iii) $R=R_A+R_B$ 是(补)半格和,其中 $A^2=A$, $B^2=B$ 且 $AB=BA=B$.

定理 4.3 (i) 设环 R 是子环 $R_\alpha(\alpha\in Y)$ 的半格和,则当 $R_\alpha(\alpha\in Y)$ 都是弱正则环时,R 是弱正则环.

(ii) 设环 R 是子环 $R_\alpha(\alpha\in Y)$ 的补半格和,则当 R 是弱正则环时,$R_\alpha(\alpha\in Y)$ 都是弱正则环.

证明 (i) 任取 $a\in R$,设 $a=\sum_{i=1}^{n}a_{\alpha_i}$,其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in Y$,$a_{\alpha_i}\in R_{\alpha_i}$. 令 T 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 生成的子半格,则 $|T|<+\infty$ 且 $R_T=\sum_{\alpha\in T}R_\alpha$ 是 $R_\alpha(\alpha\in T)$ 的半格和. 下面对 $|T|$ 用归纳法证明 R_T 是弱正则的.

$|T|=1$ 时显然. 假定 $|T|<k(k\geqslant1)$ 时 R_T 是弱正则环. 讨论 $|T|=k$ 的情况. T 中必有 Y 的非零元(设为 α_0). 据引理 4.2,存在 T 的不相交真子半格 A,B,使 $\Gamma=A\cup B$ 且 $\alpha_0\in A$,$R_A=\sum_{\alpha\in A}R_\alpha$ 是半格和,$R_B=\sum_{\beta\in B}R_\beta$ 是半格和且 R_B 是 R 的理想. 由于 $|A|<|T|=k$,$|B|<|T|=k$,由归纳假设,R_A 和 R_B 是弱正则环. 又据引理 4.2 和 4.1,$R_T=R_A+R_B$ 是弱正则环.

因此由 $a\in R_T$ 得 $a\in R_T^1aR_T^1a\subseteq R^1aR^1a$,即 R_T 是弱正则环.

(ii) 若 α 是 Y 的零元,则 $R_\beta R_\alpha\subseteq R_\alpha$,$R_\alpha R_\beta\subseteq R_\alpha$ 即 R_α 是 R 的理想. 据定理 A,R_α 是弱正则环. 若 $\alpha\in Y$ 不是零元,则据引理 4.2,存在真子半格 A 和 B 使 $A\cup B=Y$,$A\cap B=\varnothing$ 且 R_α 是 R_A 的理想,R_B 是 R 的理想,$R=R_A+R_B$ 是补半格和. 据引理 4.1,R_A 是弱正则的. 又由于 R_α 是 R_A 的理想,故 R_α 是弱正则的.

参 考 文 献

[1] V. S. Ramamurthi, *Weakly regular rings*, Canad. Math. Bull., Vol. 16(3), 1973, 317—321.

[2] J. W. Fisher, *Von Neumann Regular Rings Versus V-Rings*, *Ring Theory*: Proc. Oklahoma Conference, Lecture Notes 7, 101—119, Dekker, New York, 1974.

[3] 萧宇飞,关于弱正则环的一些结果,数学年刊,11(A):1(1990),64—68.

[4] 李方,*The weak regularity of semigroup rings*,东北数学,Vol. 8, No. 1, 1992, 1—3.

[5] A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1961.

[6] J. Janeski and J. Neissglass, *Regularity of Semilattice Sums of Rings*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 39 (1973), 479—482.

On the Weak Regularity of Rings

Li Fang

(Dept, of Math., & Mech., Southeast Univ., Nanjing)

Abstract

We give a necessary and sufficient condition for the weak regularity of ring, and then intnestignte the weak regularity of Munn rings. Moreover, the weak regularity is characterized for the (supplementary) semilattice sum of rings.

Keywords ring, weak regularity, Munn ring, (supplementary) semilattice sum.