路代数的有向图特征与 Brown-McCoy 根*

陈　辉
(绥化师范专科学校，黑龙江 152053)

高振林
(芜湖教育学院，安徽 241000)

摘　要　本文解决路代数中若干遗留问题，给出本原路代数、(右)Goldie 路代数的有向图特征，证明广义路代数的 Brown-McCoy 根与它的 Jacobson 根不必重合.

关键词　Brown-McCoy 根，n-族，本原代数，Noether 代数，Goldie 代数.

本原路代数、(右)Goldie 路代数的有向图特征与路代数的 Brown-McCoy 根是否重合于它的 Jacobson 根，这是路代数中至今尚未解决的重要问题. 本文通过讨论只含一个顶点的有向图的几何性质和广义道路的代数性质，部分地解决了以上问题. 本文将直接采用[1][4]中的有关概念和记号，不再重复解释.

设 Δ 为有向图，$K(\Delta)$为其上路代数，若 Δ_0 含有限个顶点，称 $K(\Delta)$为有限图路代数；若 Δ_0 含无限个互异顶点，则称 $K(\Delta)$为广义路代数. 易见，若$|\Delta_0|=1$，则 Δ 只能是孤点图、有向环(见[4])或在此点处含多于一个有向环，称后者为有向环族；若有向环族含 n 个有向环，称其为 n-族. 易知，n-族的路代数同构于有单位元的秩 n 自由代数.

定理 1　设 $K(\Delta)$为本原路代数，则 Δ 是孤点图或有向环族.

证明　设 M 为实单 $K(\Delta)$-模. 用反证法证明 Δ_0 只含一个顶点.

若$|\Delta_0|\geqslant 2$，取 $b\in\Delta_0$，$e_b=(b|b)$，则有 Δ 中的箭向 $a=(a|a|b)$，$a\neq b$，因 $a\overline{\in} A_{-}M=\{x\in K(\Delta)|\forall\ m\in M, xm=0\}=0$，故有 $0\neq m_b\in M$，使得 $am_0\neq 0$. 于是 $M=K(\Delta)m_b=K(\Delta)am_b$，故 $0\neq e_bm_b\in M$，且有 $0\neq x\in K(\Delta)$使得 $e_bm_b=xam_b$，由 $0=e_b$ 的长小于 xa 的长，知$(0:m_b)=\{x\in K(\Delta)|xm_b=0\}\neq 0$，于是 $K(\Delta)/(0:m_b)\cong M$ 是单 $K(\Delta)$-模，从而它的非零子模$(K(\Delta)e_b+(0:m_b))/(0:m_b)=K(\Delta)/(0:m_b)$. 由$(0:m_b)$的极大性，$K(\Delta)=K(\Delta)e_b+(0:m_b)$，于是对于任意 $e_c\in K(\Delta)$，$e_c=(c|c)$，$c\neq b$，存在 $x\in K(\Delta)$，$y\in(0:m_b)$，使得 $e_c=xe_b+y$，由 $e_c=e_c^2=xe_be_c+ye_c=ye_c$，比较两边元的长得：$y=e_c$，即 $e_c\in(0:m_b)$. 至此证得，对任意的 $e_b\in K(\Delta)$，存在 $m_b\in M$，使得 $e_b\overline{\in}(0:m_b)$，而对任意 $e_c\in K(\Delta)$，$c\neq b$，总有 $e_c\in(0:m_b)$，且易知 m_b，m_c 是 Z-无关元(Z 是整数集)，$c\neq b$.

反之，对 $0\neq m\in M$，由 $M=K(\Delta)m$，存在 $e_a\in K(\Delta)$，$e_a\overline{\in}(0:m_b)$，$e_a=(a|a)$. 若$(0:m)=0$，则 $K(\Delta)\cong M$ 是单 $K(\Delta)$-模，于是 $0\neq K(\Delta)e_a=K(\Delta)$，而$|\Delta_0|\geqslant 2$，必有 $e_b\in K(\Delta)$，$b\neq a$，但是 $e_b\overline{\in}K(\Delta)e_a$，矛盾，故$(0:m)\neq 0$. 同上段作法可得 $K(\Delta)=K(\Delta)e_a+(0:m)$，于是对任意 $e_b=(b|b)\in K(\Delta)$，存在 $x\in K(\Delta)$，$y\in(0:m)$，使得 $e_b=x\cdot e_a+y$，进而可得 $y=e_b\in(0:m)$. 综合以上两方面，得：

* 1991 年 11 月 18 日收到. 黑龙江省教委科研基金资助项目.

(i) $I=\{m_a|\forall\ a\in\Delta_0\}$是 M 的 Z-无关子集. 具以下性质:对$\forall\ m_a\in I$,必有 $e_a\overline{\in}(0:m_a)$,而 $e_b\in(0:m_a)$,$\forall\ b\in\Delta_0,b\neq a$.

(ii) 对$\forall\ 0\neq m\in M$,$\exists\ e_a\in K(\Delta)$,使得 $e_a\overline{\in}(0:m)$,而 $e_b\in(0:m)$,$\forall\ b\in\Delta_0,b\neq a$.

因$|\Delta_0|\geqslant 2$,故可取到 $m_a,m_b\in I,a\neq b$. 由(i)知 $m=m_a+m_b\neq 0$,由(ii)知,$\exists\ e_c=(c|c)\in K(\Delta)$,使得 $e_cm\neq 0$,若 $c\neq a,c\neq b$,则由(i) $0=e_c(m_a+m_b)=e_cm\neq 0$,引出矛盾. 若 $c=a$(或 $c=b$)则 $e_cm=e_am=e_a(m_a+m_b)=e_am_a$,即 $e_a\overline{\in}(0:m)$. 由(ii),$e_b\in(0:m)$,即 $0=e_bm=e_b(m_a+m_b)=e_bm_b\neq 0$ 又得到矛盾. 这些矛盾说明$|\Delta_0|=1$.

往证 Δ 不是有向环,从而结论成立.

若 Δ 是有向环,则 $K(\Delta)\subsetneq K[x]$(代数同构). 这里 $K[x]$为关于 x 的多项式代数(见[1]),从而 $K(\Delta)$是交换本原代数,进而是域,但显然 $K[x]$不是域. 矛盾. 定理证毕.

定理 1 给出了本原路代数的有向图特征,并由此说明,本原路代数只能是单代数或有单位元的族 n 自由代数.

为讨论(右)Goldie 路代数,先证明:

引理 1 设 $K(\Delta)$为(右)Goldie 路代数,则 Δ_0 只含有限个顶点.

证明 若 Δ 有无限多个顶点. 设 $e_i=(a_i|a_i)$ $i=1,2,\cdots,n,\cdots$是其中可数个,作右理想 $I_n=\sum_{i=1}^{n}e_iK(\Delta)$,$n=1,2,\cdots$. 由假设,对$\forall\ I_n$,总有 e_{n+1},使 $e_{n+1}\cdot I_n=0$. 即 I_n,$n=1,2,\cdots$均为某个子集的右零化子,于是易知:I_1 真包含于 I_2 真包含于 $I_3\cdots$是无限递增右零化子链,这与题设矛盾.

引理 2 n-族的路代数不是(右)Noether 代数,也不是(右)Goldie 代数.

证明 设 Δ 是 n-族,由[1]命题 3 易知 $K(\Delta)$不是(右)Noether 的,若 $K(\Delta)$是(右)Goldie 代数,由[4]定理 1 知,$K(\Delta)$是(右)Goldie 素代数,由 Goldie 定理,它有单 Artin 的右分式环.

另一方面,因 $K(\Delta)$是整域(见[2]). 设 $\alpha_1,\alpha_2\in\Delta,\alpha_1\neq\alpha_2$,因 Δ 是 n-族,易知不存在 $x,y\in K(\Delta)$,使得 $x\alpha_1=y\alpha_2$,故 $K(\Delta)$不能是(右)Ore 环,从而没有(右)分式环,这是个矛盾. 故结论成立.

定理 2 下列命题等价:

(i) $K(\Delta)$是(右)Goldie 代数;

(ii) $K(\Delta)$是(右)Noether 代数.

证明 只需证(i)$\Rightarrow$(ii)即可. 设

$$I_1\subseteq I_2\subseteq I_3\subseteq\cdots\subseteq I_n\subseteq\cdots \tag{1}$$

为任一右理想升链,由引理 1 可设 $1=\sum_{i=1}^{m}e_i,e_i=(a_i|a_i)$,为 $K(\Delta)$的单位元,则对任一右理想 $I=1\cdot I=\sum_{i=1}^{m}e_iI$,于是欲证(1)有限步终止,只需证下面右理想升链:

$$e_iI_1\subseteq e_iI_2\subseteq\cdots\subseteq e_iI_n\subseteq\cdots,\quad\forall\ 1\leqslant i\leqslant m \tag{2}$$

有限步终止即可.

若 Δ_0 不只含一个顶点,则对每个 e_iI_n,$1\leqslant i\leqslant m$,$\exists\ e_j,j\neq i,1\leqslant j\leqslant m$,使得 $e_je_iI_n=0,n=1,2,\cdots$,即 e_iI_n,$1\leqslant i\leqslant m,n=1,2\cdots$均为右零化子右理想. 由题设,(2)有限步终止;若 Δ_0 只含一个顶点,则 Δ 只能是孤点图,有向环或有向环族之一,而由[1]命题 3 易知,孤点图、有向环的路代数

均为(右)Noether 代数,又由引理 2 知有向环族的路代数即不是(右)Noether 的,也不是(右)Goldie 的,综合之得结论,证毕.

由[1]命题 3 与以上定理 2 即得(右)Goldie 路代数与(右)Noether 路代数有完全相同的有向图特征.

最后讨论广义路代数的 Brown-McCoy 根以结束本文.

我们称有向图 Δ 中含无限多个顶点的道路为广义道路. 显然,广义道路含无限多个箭向,广义道路之间以及它们与其他道路之间的乘法仍按[1]中规定进行,视广义道路的长为∞.

引理 3 设 Δ 为有向图,则 $K(\Delta)$中所有广义道路支撑的 K-向量空间形成 $K(\Delta)$的理想,记为 $N(\Delta)$.

证明 若 Δ 中无广义道路,则 $N(\Delta)=0$. 设 $N(\Delta)\neq 0$,注意到广义道路与任一道路左(或右)乘之结果,或为零,或仍是广义道路,即知结论成立.

引理 4 设 Δ 是有向图,则 $N(\Delta)\subseteq G(K(\Delta))$,这里 $G(K(\Delta))$为 $K(\Delta)$的 Brown-McCoy 根.

证明 不妨设 $N(\Delta)\neq 0$,由引理 3 只要证 $N(\Delta)$中任意元均为 G-正则元即可.

设 $0\neq u=\sum_{i=1}^{t} f_i u_i\in N(\Delta)$,$t\geqslant 1$,$u_i$,$1\leqslant i\leqslant t$ 均是广义道路. 因 u_i,$1\leqslant i\leqslant t$ 含无限个顶点,而 u_i,$i=1,2,\cdots,t$,起、终点总数为有限数,于是易发现,总可取到非循环道路 α_{i1},α_{i2},$1\leqslant i\leqslant t$,满足:

(i) $u_i=\alpha_{i1}\alpha_{i2}$, $1\leqslant i\leqslant t$;

(ii) $\alpha_{i1}\alpha_{j2}=0$, $i\neq j$, $1\leqslant i,j\leqslant t$;

(iii) $\alpha_{i1}\alpha_{j1}=0$ 或 $\alpha_{i2}\alpha_{j2}=0$, $1\leqslant i,j\leqslant t$.

令 $u'=\sum_{i=1}^{t} f_i\alpha_{i1}$,$u''=\sum_{j=1}^{t}\alpha_{j2}$. 易验证 $u=u'u''$,且 $u'^2=0$ 或 $u''^2=0$. 这样我们在 $K(\Delta)$中可取到:$x=2u$,$x_1=-3u'$,$y_1=u''$,$x_2=-2u$,$y_2=\sum_{k=1}^{l} e_{a_k}$,$l\leqslant t$,$a_k$,$1\leqslant k\leqslant l$ 是 $u_i(1\leqslant i\leqslant t)$的 t 个终点中互异的终点,$x_3=2u'$,$y_3=u''$(无论域 K 的特征怎样,它们都是一组不全为零的元). 使得:

$$u+x+ux+\sum_{i=1}^{3}(x_i u y_i+x_i y_i)=u+2u+2u^2-3u'u'u''u''-3u-2u^2$$
$$-2u+2u'u'u''u''+2u=0.$$

即 u 是 G-正则元. 引理证完.

由引理 3,4 与[1]命题 5 易证:

定理 3 设 $K(\Delta)$是广义路代数,若 Δ 中有广义道路 u 含于某个循环道路中,则 $G(K(\Delta))$真包含 $J(K(\Delta))$. 这里 $J(K(\Delta))$是 $K(\Delta)$的 Jacobson 根.

若广义路代数 $K(\Delta)$为素的,则 $J(K(\Delta))=0$,$G(K(\Delta))\neq 0$.

至于有限图路代数相应问题还有待讨论.

参 考 文 献

[1] 刘绍学，有向图的几何性质和其路代数的代数性质，数学学报，4(1988).

[2] N. Jacobson, *Structure of Rings*, AMS Colloquium Publ. Vol 37, 1956 Second Edition 1964.

[3] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, Springer-Verlag, New York, 1973.

[4] 陈辉，无限竞赛图H-圈的存在性和半素路代数，黑龙江大学学报. 4(1989).

Properties of Digraphs and Brown-MeCoy Radical for Path Algebras

Chen Hui *Gao Zhenlin*

(Suihua Teachers College) (Wuhu Educational College)

Abstract

In this paper, we discuss the properties of digraphs for primitive path algebra and (right) Goldie path algebra; and prove that Brown-McCoy radical of the generalized path algebra does not coincide with the Jacobson radical in general.