第14卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 14 No. 4
1994年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1994

关于重积分换元公式证明的一个评注*

施锡泉　郑斯宁　　　施淑兰
(大连理工大学，大连 116024)　(内蒙古通辽市第十一中学)

摘　要　本文指出了现行数学分析教本中有关重积分换元公式证明所普遍忽视的一个漏洞，同时给出了该公式的一个新的初等证明.

关键词　重积分换元公式.

关于重积分换元公式，有如下的熟知定理(以二重积分为例)：

定理1　设 Ω 和 Ω' 分别是 uv-平面和 xy-平面上的有界区域，$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$是 Ω 到 Ω' 的一对一连续光滑映射，且其 Jacobi 式 $J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\neq 0$(或减弱为除个别点外 $J\neq 0$). 则对 $f\in C(\Omega')$成立有

$$\iint_{\Omega'} f(x,y)dxdy=\iint_{\Omega} f(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,\mathrm{dudv}. \tag{1}$$

国内现行各数学分析教本[1-5]对这一定理的证明大同小异，大意是：

由定理假设，(1)式两端积分都存在，故只需证明它们相等. 设 $A(u,v)$，$B(u+du,v)$，$C(u+du,v+dv)$和 $D(u,v+dv)$是 Ω 中小矩形 $ABCD$ 的顶点(图1)，曲边四边形 $A'B'C'D'$是其在 Ω' 中的象(图2).

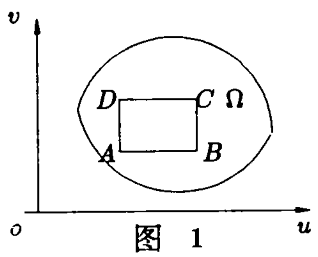

图 1

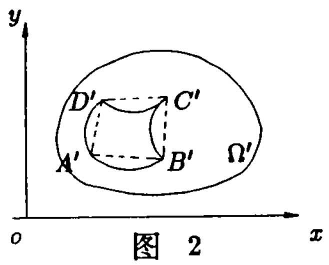

图 2

定理的证明归结为证明以下两个关键的等式：

$$S_{象}=S_{直}+o(dudv), \tag{2}$$

$$S_{直}=|J|dudv+o(dudv), \tag{3}$$

其中 $S_{象}$ 和 $S_{直}$ 分别是曲边四边形 $A'B'C'D'$(实线)和直边四边形 $A'B'C'D'$(虚线)的面积. 在本文所出现的 $O(f)$均指 $\left|\frac{O(f)}{f}\right|$一致有界，而 $o(f)$均指$\frac{o(f)}{f}$一致收敛到零. 现行教本都只通过直接计算证明(3)式. 而关于(2)式，即曲边四边形 $A'B'C'D'$与直边四边形 $ABCD$ 之差为 $o(dudv)$全都未加证明，只是用"可以证明"一带而过.

---

* 1994年4月6日收到. 辽宁省普通高等学校教学成果立项项目.

然而，我们认为，(2)式的证明绝非易事．为此，要么我们去证明图 2 中连接相邻顶点的曲边和直边所围成的弓形面积(例如由曲边 $A'B'$ 和直边 $A'B'$ 所围弓形的面积，记为 $S_{弓A'B'}$)全部为 $o(dudv)$，要么证明所有这 4 个弓形面积相互抵消后为 $o(dudv)$．我们指出，前者是有条件成立的，后者则是极其困难的．

关于前者，我们要证明

$$S_{弓A'B'} = o(dudv) \tag{4}$$

但(4)式并非总能成立．例如在极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 下(图 3)

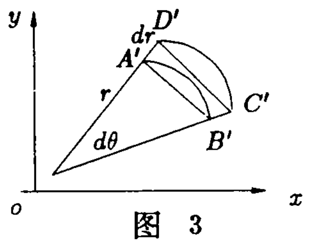

图 3

我们有 $S_{弓A'B'}=\frac{r^2}{2}d\theta-\frac{r^2}{2}\sin\theta d\theta=\frac{1}{12}d\theta^3+O(d\theta^5)$．取 $dr=d\theta^{\alpha}(\alpha>0)$，则有

$$\frac{S_{弓A'B'}}{drd\theta} = \frac{1}{12}d\theta^{2-\alpha} + O(d\theta^{4-\alpha}). \tag{5}$$

由(5)式可见，只有当 $\alpha<2$ 时，(4)式才成立，即 $S_{弓A'B'}$ 是 $drd\theta$ 的高阶无穷小．而当 $\alpha\geqslant 2$ 时，(4)式不再成立．事实上，$\alpha=2$ 时，$S_{弓A'B'}$ 与 $drd\theta$ 同阶；$\alpha>2$ 时，$S_{弓A'B'}$ 的阶低于 $drd\theta$．尽管对于极坐标变换我们可以直接证明(2)式，因为 $S_{弓C'D'}$ 与 $S_{弓A'B'}$ 同阶且相互抵消后恰为 $o(drd\theta)$．但是此例已经说明：(4)式确有可能不成立．

对于一般情形去证明 4 个小弓形面积相互抵消后为 $o(drd\theta)$，将是极其困难的([5]中的一个证明即是在比定理 1 更强的条件下，运用格林公式才做到这一点)．因为首先必须排除 4 条曲边全都向内凸(图 4)和全都向外凸(图 5)两种情形．允许 Jacobi 式在个别点为零时此类情形即有可能发生．即使有条件 $J\neq 0$，要想排除之也很困难．

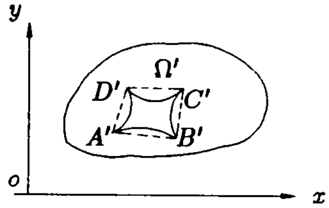

图 4

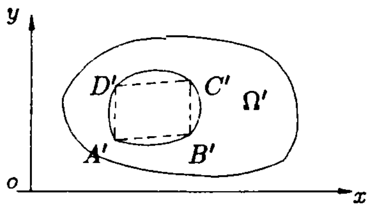

图 5

下面我们给出定理 1 的一个新的初等证明．

不妨设 $\Omega\subset[0,1]\times[0,1]$．由定理假设，(1)式两端积分都存在，只需证明它们相等．令 $u_i=v_i=\frac{i}{n}, 1\leqslant i,j\leqslant n-1$．由直线 $u-u_i=0$ 和 $v-v_i=0, 0\leqslant i\leqslant n$，得到 Ω 的一个分划，记为 $\Delta:=\{\Omega_{ij}\mid 0\leqslant i,j\leqslant n-1\}$．其中 Ω_{ij} 是以$(\frac{i}{n},\frac{j}{n})$，$(\frac{i+1}{n},\frac{j}{n})$，$(\frac{i+1}{n},\frac{j+1}{n})$和$(\frac{i}{n},\frac{j+1}{n})$为顶点的正方形之位于 Ω 中的部分．相应地有 Ω' 的分划 $\Delta':=\{\Omega'_{ij}\mid 0\leqslant i,j\leqslant n-1\}$，其中 Ω'_{ij} 是 Ω_{ij} 的象．由 $x(u,v)$ 和 $y(u,v)$ 的连续性知$\{\Omega'_{ij}\}$中成员的最大直径 $d'\to 0(n\to\infty)$．我们以 $S_{弓A'B'}$ 为例计算图 2 中弓形的面积．不妨设 $x_{A'}<x_{B'}$．记

$$g(u)=y(u,v_A)-\frac{y_B-y_{A'}}{x_B-x_{A'}}(x(u,v_A)-x_{A'})-y_{A'},$$

则有

$$S_{\text{弓}A'B'}=\left|\int_{x_{A'}}^{x_{B'}}(y-\frac{y_{B'}-y_{A'}}{x_{B'}-x_{A'}}(x-x_{A'})-y_{A'})dx\right|\leqslant\int_{u_A}^{u_B}|g(u)||x'(u,v_A)|du$$

$$=o(du^2)=o(\frac{1}{n^2}).\tag{6}$$

这里用到了$|x'(u,v_A)|$的有界性及$g(u_A)=g(u_B)=0$(从而$g(u)=g'(\xi)(u-u_A)$且$g'(\xi)=o(1)$).于是在给定分划下有(4)式成立.再由(3)式我们有

$$\iint_{\Omega'}f(x,y)dxdy=\lim_{d'\to 0}\sum_{i,j}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\Omega'_{ij}$$

$$=\lim_{d\to 0}\sum_{i,j}f(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j))(|J(u_i,v_j)|\Delta\Omega_{ij}+o(\frac{1}{n^2}))$$

$$=\iint_{\Omega}f(x(u,v),y(u,v))|J|\mathrm{dudv},$$

这里$\sum_{i,j}$表示对所有可能的i,j求和,$\Delta\Omega'_{ij}$和$\Delta\Omega_{ij}$分别表示Ω'_{ij}和Ω_{ij}的面积.

可以看出,我们是在du与dv同阶(均为$\frac{1}{n}$)的条件下证明(4)式的.事实上,由(6)式有$S_{\text{弓}A'B'}=o(du^2)$.同理$S_{\text{弓}B'C'}=o(dv^2)$.若同时成立有$S_{\text{弓}A'B'}=o(dudv)$和$S_{\text{弓}B'C'}=o(dudv)$,就应该有du与dv为同阶无穷小量.这也正是使(4)式(从而(2)式)成立的关键要求.

感谢徐利治教授对作者的支持和鼓励.

参 考 文 献

[1] 华罗庚,高等数学引论,科学出版社,1963.

[2] 数学分析,吉林大学数学系编,人民教育出版社,1979.

[3] 数学分析(第二版),复旦大学数学系陈传璋等编,高等教育出版社,1983.

[4] 数学分析,武汉大学数学系编,人民教育出版社,1979.

[5] T.M.菲赫金哥尔茨,微积分学教程(中译本),人民教育出版社,1956.

A Remark on Change of Variables Formula for Multiple Integrals

Shi Xiquan　　*Zheng Sining*　　　　*Shi Shulan*

(Dalian Univ. of Tech., Dalian 116024)　(The 11st Middle School of Tongliao City)

Abstract

We point out a common fault in current textbooks of mathematical analysis on the proof of the change of variables formula in multiple integrals, and then give a new proof for this formula.