集值保通(CO)映射的上半连续性*

方 嘉 琳

(辽宁师范大学，大连 116022)

摘 要 本文讨论了集值映射是保通(CO)映射以及保通(CO)映射是上半连续映射的一些充分条件.

关键词 保通(CO)映射,上半连续映射.

分类号 AMS(1991) 54C60/CCL O189.11

R. Hrycay 在[1]中导入集值保通(CO)映射的概念并讨论了它的一些性质,本文将进一步研究集值保通(CO)映射的上半连续性,在非线性分析和最优化问题中是有用的[3].

本文涉及的空间是 T_1 空间,用 $\Sigma(A)$ 表示 A 的开邻域系,$\Gamma(A)$ 表示 A 的闭邻域系,bd$A$ 表示 A 的边界. 设 Ω 是 X 上的滤子,用 adΩ 表示 Ω 的接触集,即 $\mathrm{ad}\Omega=\bigcap\{\overline{B}:B\in\Omega\}$. 设 $F:X\to Y$ 为拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的集值映射,$F^-(A)=\{x:\exists\ y\in A$, 使 $y\in F(x)\}$, $F^+(A)=\{x:F(x)\subset A\}$, $F(A)=\bigcup\{F(x):x\in A\}$. 由映射 F 确定映射 $G_F:X\to X\times Y$ 为 $G_F(x)=\{x\}\times F(x)$,称 G_F 为 F 的图象映射. 当对于 X 的每点 x, $F(x)$ 恒为 Y 的闭(紧、连通)子集时,称 F 为点闭(点紧、点连通)映射. 如果对于 Y 的每点 y, $F^-(y)$ 恒为 X 的闭子集时,称 F 为点逆闭映射. 设 $x_0\in X$,如果对于 $\forall\ V\in\Sigma(F(x_0))$, $\exists\ U\in\Sigma(x_0)$,当 $x\in U$ 时恒有 $F(x)\subset V$,则称 F 在 x_0 点是上半连续的. 如果 F 在 X 的任一点上都是上半连续的,则称 F 为上半连续映射. 将任一连通集映射为连通集的映射称为保通映射,F 的图象映射 G_F 为保通映射时称 F 为连通映射. 将任一开连通集映射为连通集的映射称为保通(CO)映射,F 的图象映射 G_F 为保通(CO)映射时称 F 为连通(CO)映射. 设 $\pi:X\times Y\to Y$ 为 $\pi(x,y)=y$ 的映射,则 π 为连续单值映射且 $\pi\circ G_F=F$. 故当 G_F 为保通映射时 F 必为保通映射;当 G_F 为保通(CO)映射时 F 必为保通(CO)映射. 亦即连通映射必为保通映射,连通(CO)映射必为保通(CO)映射. 由定义显然有保通映射必为保通(CO)映射,连通映射必为连通(CO)映射. 保通映射必为点连通映射,于是有关系:

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & \text{保通映射} & \longrightarrow & \text{点连通映射} \\ \text{连通映射} & & & \searrow & \\ & \searrow & \text{连通映射(CO)映射} & \longrightarrow & \text{保通(CO)映射} \end{array}$$

这些蕴含关系都是严格的,其逆皆不成立. [6]举例指出保通映射未必为连通映射,该例也指出保通(CO)映射未必为连通(CO)映射,保通映射也未必为连通(CO)映射.

例: 设 $F:[0,1]\to[0,1]$ 为

* 1992年2月27日收到.

$$F(x)=\begin{cases}[\frac{1}{2},1], & \text{当 } x>\frac{1}{2},\\ [\frac{1}{3},\frac{2}{3}], & \text{当 } x<\frac{1}{2},\\ [\frac{1}{4},\frac{1}{3}], & \text{当 } x=\frac{1}{2},\end{cases}$$

则 $F([\frac{1}{2},\frac{2}{3}])=[\frac{1}{4},\frac{1}{3}]\cup[\frac{1}{2},1]$. 故 F 不是保通映射. 但 F 确是保通(CO)映射及连通(CO)映射. 显然保通(CO)映射未必为点连续映射,点连通映射也未必是保通(CO)映射. 已知上半连续点连通映射是保通映射[3,6],单值连续映射是保通映射,集值映射则不然. 甚至单调的连续映射,连续开映射等都未必是保通映射[6].

定理 1 设 X 为局部连通空间,$F:X\to Y$ 对$\forall$ $x\in X$ 及$\forall$ $W\in\Sigma(x)$,$\exists$ 连通的 $U\in\Sigma(x)$,使 $U\subset W$ 且 $F(U)$ 为连通集,则 F 为保通(CO)映射.

证明 设 M 为 X 的任一开连通集. $\forall$ $x\in M$ 取连通邻域 $U_x\in\Sigma(x)$,使 $x\in U_x\subset M$,$F(U_x)$ 为连通集. 作 $\mathscr{A}=\{U_x:x\in M\}$,$F(M)=\bigcup\{F(U_x):x\in M\}$. 取定 $y_0\in F(M)$,则$\exists$ $x_0\in M$,使 $y_0\in F(x_0)$. 作集合 $K=\{z:\exists\ x_0,x_1,\cdots,x_n\in M,z\in U_{x_n},U_{x_i}\cap U_{x_{i+1}}\neq\varnothing,\ (i=0,\cdots,n-1). U_{x_i}\cap U_{x_j}=\varnothing,(j=i\pm 1),U_{x_i}\in\mathscr{A},(i=1,\cdots,n)\}$. 因 $x_0\in K$,故 $K\neq\varnothing$. $\forall$ $z\in K$,由 K 的构造必有 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in M$,使 $z\in U_{x_n}$,$U_{x_i}\cap U_{x_j}=\varnothing(j\neq i\pm 1)$,$U_{x_i}\cap U_{x_{i+1}}\neq\varnothing(i=0,\cdots,n-1)$,$U_{x_i}\in\mathscr{A},(i=0,1,\cdots,n)$. 故 $U_{x_n}\subset K$. 即 K 为开集. 若 z 为 M 中 K 的聚点. 则$\forall$ $V\in\Sigma(z)$有 $V\cap K\neq\varnothing$. 故 $U_z\cap K\neq\varnothing$. 取 $t\in U_z\cap K$,对于 t,$\exists$ $x_1,\cdots,x_n$,使 $U_{x_{i+1}}\cap U_{x_i}\neq\varnothing(i=0,1,\cdots,n-1)$,$U_{x_i}\cap U_{x_j}=\varnothing(j\neq i\pm 1)$,$U_{x_i}\in\mathscr{A}(i=0,1,\cdots,n)$,$t\in U_{x_n}$. 观察$\{U_z\cap U_{x_i}:i=0,1,\cdots,n\}$,取 $U_z\cap U_{x_i}\neq\varnothing$的最小下标 m,m 是存在的,最大是 n. 故 $z\in K$,而 K 为 M 中闭集. 因 K 在 M 中既开且闭,而 M 为连通集,故 $K=M$. $\forall$ $y\in F(M)$,$\exists$ $x\in M$ 使 $y\in F(x)$,因 $x\in K$,故$\exists$ $x_1,\cdots,x_n$ 使 $x\in U_{x_n}$,而$\{y_0,y\}\subset\bigcup\{F(U_{x_i}):i=0,1,\cdots,n\}$. 因$\bigcup\{F(U_i):i=0,1,\cdots,n\}$为连通集,故 $F(M)$中任一点和 y_0 必同在 $F(M)$的某一连通子集中,于是 $F(M)$是连通集.

R. E. Smithson[2] 用 $T(F,y)$给出保通映射是连通映射的充分条件. 今推广这一结果于保通(CO)映射.

集合 $T(F,y)$定义为 $x_0\in T(F,y)$当且仅当$\forall$ $V\in\Sigma(y)$和$\forall$ $U\in\Sigma(x_0)$,$\exists$ $x\in U$ 使 $F(x)\cap V\neq\varnothing$. 令 $T(F,B)=\bigcup\{T(F,y):y\in B\}$[2].

定理 2 设 X 是局部连通局部紧空间,$F:X\to Y$ 为点连通点紧保通(CO)映射,且对任一开连通集 M 及$\forall$ $x\in M$ 有 $T(F,F(x))\cap\overline{M}=\{x\}$,则 G_F 是保通(CO)映射.

证明 否则,则存在开连通集 M,使 $G_F(M)=C_1\cup C_2$,$C_1\cap\overline{C}_2=\overline{C}_1\cap C_2=\varnothing$. 作 $A_i=\{x:$存在开连通相对紧邻域 U_x,使 $G_F(U_x)\subset C_i\}(i=1,2)$. 则 A_1,A_2 为开集,$A_1\cup A_2\subset M$,因 M 为连通集,故 $M\backslash A_1\cup A_2\neq\varnothing$. 若 $x_0\in M\backslash A_1\cup A_2$,$\forall$ $U\in\Sigma(x_0)$必有 $G_F(U)\cap C_i\neq\varnothing,(i=1,2)$. 取 x_0 的开连通相对紧领域 $K\subset M$,则 $G_F(K)=(G_F(K)\cap C_1)\cup(G_F(K)\cap C_2)=H_1\cup H_2$,则 H_1,H_2 为分离集. 令 $B_i=G_F(H_i)\cap K\ \ (i=1,2)$,则 $K=B_1\cup B_2$. 由 F 的点连通性知当 $x\in B_1$ 时,$G_F(x)\subset H_1$ 且 $G_F(x)\cap\overline{H}_2=\varnothing$. 由 F 的点紧性知存在开集 $V\subset X$,$W\subset Y$,使 $G_F(x)\subset V\times W$ 且 $V\times W\cap H_2=\varnothing$. 若 $a\in V\cap B_2$,则 $G_F(a)\subset H_1\cup H_2$,$G_F(a)\cap H_2\neq\varnothing$. 因 $G_F(a)$是连通的,故 $G_F(a)\subset H_2$. 于是 $G_F(a)\cap(V\times W)=\varnothing$. 即 $F(V\cap B_2)\cap W=\varnothing$. 于是

$\forall\, x\in B_1$, $\exists$ 开集 $V_x\subset X, W_x\subset Y$ 使 $x\in V_x, F(x)\subset W_x, F(V_x\cap B_2)\cap W_x=\varnothing$.　(1)

类似的，有

$\forall\, y\in B_2$, $\exists$ 开集 $V_y\subset X, W_y\subset Y$ 使 $y\in V_y, F(y)\subset W_y, F(V_y\cap B_1)\cap W_y=\varnothing$.　(2)

因 $K=B_1\cup B_2, F(K)=F(B_1)\cup F(B_2)$. 若 $F(B_1)\cap\overline{F(B_2)}\neq\varnothing$，则$\exists\ x_0\in B_1, z\in F(x_0)$ 且 $z\in\overline{F(B_2)}$. 设 $\Omega=\{F^-(o)\cap B_2, o\in\Sigma(z)\}$. 则 Ω 为 $\overline{K}$ 上的滤子基. 因 $\overline{K}$ 是紧集，故 Ω 有接触点 $x_1\in\overline{K}$. 即 $\forall\ o\in\Sigma(z), \forall\ U\in\Sigma(x_1), U\cap F^-(o)\cap B_2\neq\varnothing$. 亦即$\exists\ x\in U\cap B_2$ 使 $F(x)\cap o\neq\varnothing$. 故 $x_1\in T(F,z)\subset T(F,F(x_0))$. 因 $z\in F(x_0), x_0\in B_1$，由(1)式，$\exists$ 开集 $V_{x_0}\in\Sigma(x_0), W_{x_0}\in\Sigma(F(x_0))$使 $F(V_x\cap B_2)\cap W_{x_0}=\varnothing$. 即 $x_0\notin T(F,z)$. 故 $x_0\neq x_1$. 与条件矛盾. 故 $F(B_1)\cap\overline{F(B_2)}=\varnothing$. 用同样方法由(2)可证得$\overline{F(B_1)}\cap F(B_2)=\varnothing$. 即 $F(B_1)$和 $F(B_2)$是分离的. 故 F 不是保通(CO)映射. 矛盾.

J. E. Joseph[4] 定义了有次闭图象及强次闭图象的集值映射. $F:X\to Y$，如果对$\forall\ x\in X$, $\mathrm{ad}F(\Omega)\subset F(x)$，则称 F 有次闭图象，其中 $\Omega=\{U-\{x\}:U\in\Sigma(x)\}$. 如果对$\forall\ x\in X, \mathrm{ad}_\theta F(\Omega)\subset F(x)$，则称 F 有强次闭图象，其中 $\mathrm{ad}_\theta F(\Omega)=\bigcap\{\mathrm{cl}_\theta F(U-\{x\}):U\in\Sigma(x)\}=\bigcap\{\bigcap\{B:B\in\Gamma(F(U-\{x\}))\}:U\in\Sigma(x)\}$.

定理 3　设 X 为局部连通空间，Y 每点有紧边界邻域基，$F:X\to Y$ 是点紧保通(CO)映射，若 F 有次闭图象，则 F 是上半连续映射.

证明　首先指出对$\forall\ x\in X, F(x)$有紧边界邻域基. $\forall\ W\in\Sigma(F(x)), \forall\ y\in F(x), \exists\ V_y\in\Sigma(y)$，使 $\mathrm{bd}V_y$ 是紧集且 $V_y\subset W$. 则 $F(x)\subset\bigcup\{V_y:y\in F(x)\}\subset W$. $\{V_y:y\in F(x)\}$中必有有限个$\{V_{y_1},\cdots,V_{y_n}\}$覆盖 $F(x)$. 设 $V=\bigcup\{V_{y_i}:i=1,\cdots,n\}$，则 $\mathrm{bd}V$ 是紧集. 即 $F(x)$有紧边界邻域基.

若 F 不是上半连续的，则$\exists$ 点 $x_0\in X$, F 在 x_0 点不是上半连续映射. 即$\exists\ W\in\Sigma(F(x_0))$，对$\forall\ U\in\Sigma(x_0)$，均有 $F(U)\not\subset W$. 不妨设 W 为 $F(x_0)$的紧边界邻域. U 为 x_0 的连通开邻域. 由条件 $F(U)$为连通集，故 $F(U)\cap\mathrm{bd}W\neq\varnothing$. 设 Ω 为 x_0 的开连通邻域滤子基，则 $F(\Omega)\cap\mathrm{bd}W$ 是 $\mathrm{bd}W$ 上的滤子基. 因 $\mathrm{bd}W$ 是紧集，故 $\mathrm{ad}F(\Omega)\cap\mathrm{bd}W\neq\varnothing$. 因 F 有次闭图象. 故 $\mathrm{ad}F(\Omega)\subset F(x)$. 故 $F(x)\cap\mathrm{bd}W\neq\varnothing$，与 $F(x)\subset W$ 矛盾.

推论　设 X 为局部连通空间，$F:X\to Y$ 为保通(CO)映射，$\forall\ x\in X$, $F(x)$有紧边界邻域基，若 F 有次闭图象，则 F 是上半连续映射.

J. E. Joseph[4] 导入拟 H 闭集的概念，设 $A\subset X$，如果 A 上任一滤子基 Ω, $A\cap\mathrm{ad}_\theta\Omega\neq\varnothing$，则称 A 为 X 的拟 H 闭集. 其中 $\mathrm{ad}_\theta\Omega=\bigcap\{\mathrm{cl}_\theta B:B\in\Omega\}, \mathrm{cl}_\theta B=\bigcap\{M:M\in\Gamma(B)\}$.

定理 4　设 X 为局部连通空间，$F:X\to Y$ 为有强次闭图象的保通(CO)映射，$\forall\ x\in X, F(x)$有关于 Y 的拟 H 闭边界的邻域基，则 F 是上半连续映射.

证明　若 F 在 x_0 点不是上半连续的，则有 $W\in\Sigma(F(x_0))$，对$\forall\ U\in\Sigma(x_0)$均有 $F(U)\not\subset W$. 不妨设 W 有关于 Y 的拟 H 闭边界，U 为 x_0 的开连通邻域. 故 $F(U-\{x_0\})\cap\mathrm{bd}W\neq\varnothing$. 因 W 有拟 H 闭边界，故 $\mathrm{bd}W\cap\mathrm{ad}_\theta\Omega\neq\varnothing$，其中 Ω 为 $\mathrm{bd}W$ 中任一滤子基. 因$\{F(U-\{x_0\})\cap\mathrm{bd}W:U\in\Sigma(x_0)\}$是 $\mathrm{bd}W$ 中的滤子基. 故 $\mathrm{bd}W\cap\mathrm{ad}_\theta\{F(U-\{x_0\}):U\in\Sigma(x_0)\}\neq\varnothing$. 因 F 有强次闭图象，故 $\mathrm{ad}_\theta\{F(U-\{x_0\}):\{U\in\Sigma(x_0)\}\subset F(x_0)$，故 $\mathrm{bd}W\cap F(x_0)\neq\varnothing$. 这与 $W\in\Sigma(F(x_0))$矛盾.

定理 5　设 X 为局部连通空间，Y 为局部紧空间. $F:X\to Y$ 为点紧点连通映射. 若 F 为保通(CO)映射，$F(X)$为闭集且对$\forall\ x\in X, T(F,F(x))=\{x\}$，则 F 是上半连续映射.

证明　设 F 在 x_0 点不是上半连续的，则有 $W\in\Sigma(F(x_0))$，对$\forall\ U\in\Sigma(x_0), F(U)\not\subset W$. 因 Y 是局部紧的，F 为点紧的，故可取 W 为相关紧的，设 $\mathscr{B}$ 为 x_0 的开连通邻域基，对$\forall\ U\in\mathscr{B}$，有

$F(U)\cap \mathrm{bd}W\neq\varnothing$. 故 $\Omega=\{F(U)\cap \mathrm{bd}W: U\in\mathscr{B}\}$是紧子空间 $F(X)\cap \mathrm{bd}W$ 的滤子基. 故 Ω 有接触点 $y\in F(X)\cap \mathrm{bd}W$. $\forall\ V\in\Sigma(y)$, $\forall\ U\in\mathscr{B}$, $V\cap F(U)\cap \mathrm{bd}W\neq\varnothing$. 故 $x_0\in T(F,y)$. 因 $y\in F(X)$, 故 $\exists\ x_1\in X$ 使 $y\in F(x_1)$. 因 $y\in \mathrm{bd}W$, 故 $x_1\neq x_0$. 于是 $x\in T(F,y)\subset T(F,F(x_1))=\{x_1\}$, 矛盾.

参 考 文 献

[1] R. Hrycay, *Noncontinuous multifunctions*, Pac. J. Math., Vol. 35, 1(1970), 140—154.

[2] R. E. Smithson, *Connected and connectivity multifunctions*, Proc. Amer. Math. Soc., 64. 1(1977), 146—148.

[3] J. B. Hiriart-Urruty, *Images of connected sets by semicontinuous multifunctions*, J. Math. Anal. Appl., 111 (1985), 407—422.

[4] J. E. Joseph, *Multifunctions and graphs*, Pac. J. Math. Vol., 79(1978), 509—529.

[5] 方嘉琳，连通映象的连续性，东北师范大学学报，2(1964)，41—46.

[6] 方嘉琳，集值映射的连续性与连通性，四平师范学院学报，1(1979)，3—8.

On Upper Semicontinuity of Connected (CO) Multifunction

Fang Jialin

(Dept. Math., Liaoning Normal University, Dalian 116022)

Abstract

Concept of connected (CO) multifunctions introduced by R.Hrycay [1]. This paper contains some upper semicontinuity theorem and some property for connected (CO) multifunctions.

Keywords connected (CO) multifunction, upper semicontinuity.