第15卷第1期
1995年2月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 15 No. 1
Feb. 1995

半线性抛物型方程组解的Blow-up现象*

张 克 农
(厦门大学数学系, 361005)

摘 要 本文研究某一类半线性抛物型方程组解的 Blow-up 存在性及 Blow-up 点集的性质. 并证明在一定条件下单点 Blow-up.

关键词 Blow-up(爆破)点, Blow-up 时刻, 单点 Blow-up, 紧子集, 极大值原理.
分类号 AMS(1991) 35K99/CCL O175.26

一 引 言

对于半线性方程组解的存在和不存在, 有些文章进行了探索, 例如[4]. 但对于 Blow-up 性质的研究并不多. 近期内对于单个方程的 Blow-up 问题讨论比较深入, 例如[2],[3]. 本文将讨论某一类方程组解的 Blow-up 现象, 例如单点 Blow-up 及 Blow-up 点集的性质.

考虑如下方程组的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f_1(u,v) & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \quad (1.1)\\ v_t - \Delta v = f_2(u,v), & \\ u(x,t) = 0,\ v(x,t) = 0 & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T), \quad (1.2)\\ u(x,0) = \varphi(x),\ v(x,0) = \psi(x) & x \in \Omega, \quad (1.3) \end{cases}$$

其中 Ω 为 R^n 中有界域, 边界 $\partial\Omega$ 适当光滑. 不加声明时, $f_1(u,v) = uf_1(v)$, $f_2(u,v) = vf_2(u)$, 而且设 f_1, f_2, φ, ψ 满足如下条件

$$\begin{cases} \varphi(x) \geqslant 0,\ \psi(x) \geqslant 0,\ \varphi \in C^1,\ \psi \in C^1, \\ f_i(s) \geqslant 0,\ f_i'(s) > 0,\ f_i''(s) > 0,\ \text{对}\ s > 0,\ i = 1,2. \end{cases} \tag{1.4}$$

为了方便, 设 $u = (u_1, \cdots, u_k)$, 并用 $u(x,t) \leqslant 0$ 表示对一切 $i = 1,2,\cdots,k$ 有 $u_i(x,t) \geqslant 0$; 而 $u(x,t) \geqslant 0$ 表示对一切 $i = 1,2,\cdots,k$ 有 $u_i(x,t) \geqslant 0$. 由于下面证明问题的需要, 我们引入如下引理.

引理 1.1 (极值原理) 设 u 在 $\Omega \times (0,T)$ 上满足

$$L_i[u_i] + \sum_{v=1}^{k} k_{iv} u_v \leqslant 0 \quad i = 1,2,\cdots,k, \tag{1.5}$$

其中

$$L_v \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(v)}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i^{(v)}(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

* 1992年4月17日收到. 94年4月17日收到修改稿.

$$h_{ij}\leqslant 0(i\neq j),\ h_{ij}\text{ 有界},\ (a_{ij}^{(r)})\text{ 正定},\ a_{ij}^{(r)},b_i^{(r)}\text{ 有界}.$$

又设

$$\begin{cases} u(x,t)\leqslant 0 & \text{在 } \partial\Omega\times[0,T)\text{ 上}, \\ u(x,0)\leqslant 0 & \text{在 } \Omega\text{ 内}, \end{cases} \tag{1.6}$$

则在 $Q_T\equiv\Omega\times(0,T)$ 上有 $u(x,t)\leqslant 0$，又若在某一内点 (x_0,t_0) 处有 $u_i(x_0,t_0)=0$，则当 $t\leqslant t_0$，恒有 $u_i(x,t)\equiv 0$.

引理 1.2　设 u 满足(1.5)，(1.6)，且某个 $u_i(x,t)$ 在点 $p\in\partial\Omega\times(0,T)$ 取值为零. 又设在 Q_T 中存在球 k，k 在 p 点与 $\partial\Omega\times(0,T)$ 相切，并且在 k 内 $u_i(x,t)<0$，则在点 p，$u_i(x,t)$ 沿着任何与外法方向充分接近的方向导数

$$\frac{\partial u_i}{\partial v}>0. \tag{1.7}$$

引理 1.3（比较原理）　设 $u=(u_1,\cdots,u_k)$，$v=(v_1,\cdots,v_k)$ 对一切 $i=1,2,\cdots,k$ 满足

$$\begin{cases} L_i[u_i]+\sum_{j=1}^{k}h_{ij}u_j\geqslant L_i[v_i]+\sum_{j=11}^{k}h_{ij}v_j & \text{在 } Q_T\text{ 内}, \quad (1.8) \\ u_i(x,t)\geqslant v_i(x,t) & \text{在 } \partial\Omega\times(0,T)\text{ 上}, \quad (1.9) \\ u_i(x,0)\geqslant v_i(x,0) & \text{在 } \Omega\text{ 内}, \quad (1.10) \end{cases}$$

则有 $u(x,t)\geqslant v(x,t)$（在 Q_T 上）. 又若在某一点 (x_0,t_0) 有 $u_i(x_0,t_0)=v_i(x_0,t_0)$，则在 $t\leqslant t_0$ 时，恒有 $u_n(x,t)\equiv v_i(x,t)$ 在 $\Omega\times(0,t_0]$ 上.

本文将着重讨论方程组的解的 Blow-up 现象，在此我们先给出 Blow-up(爆破)的定义.

定义 1　若问题(1.1)－(1.3)的唯一解 $\{u,v\}$ 在 $\bar{\Omega}\times[0,\sigma)$ 上存在，记 $T=\sup_{\sigma}\{\sigma\mid\{u,v\}$ 在 $[0,\sigma)$ 存在$\}$，但

$$\lim_{t\to T^-}\max_{\bar{\Omega}}u(x,t)=\infty \text{ 或} \lim_{t\to T^-}\max_{\bar{\Omega}}v(x,t)=\infty \tag{1.11}$$

或(1.11)中两式同时出现，则称时刻 T 为问题解的 Blow-up 时刻.

二　单点 Blow-up 现象

在这一段，我们只对区域是对称的情况进行讨论。给出初始条件满足一定条件，问题的解将发生单点 Blow-up.

设 $\Omega=B_R=\{x\mid x\in R^n,|x|\leqslant R\}$，记 $r=|x|$，考虑如下方程组的初值问题

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=uf_1(v), & (x,t)\in\Omega\times(0,T), \quad (2.1) \\ v_t-\Delta v=vf_2(u), & \\ u(x,t)=0,\ v(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \quad (2.2) \\ u(r,0)=\varphi(r),\ v(r,0)=\psi(r), & r\in[0,R]. \quad (2.3) \end{cases}$$

引理 2.1　设 f_1,f_2,φ,ψ 满足(1.4)，并且 $\varphi_r<0$，$\psi_r<0$（当 $0<r<R$），则问题(2.1)－(2.3)在 $\{B_R\backslash\{0\}\}\times(0,T)$ 上的正解 $\{u,v\}$ 有 $u_r<0$，$v_r<0$.

证明　由 f_1,f_2 满足的条件(1.4)易证问题(2.1)－(2.3)正解的存在性(可参考[4])，且由于 φ,ψ 的径向对称，则知 $\{u,v\}$ 是径向对称，即 $u=u(r,t)$，$v=v(r,t)$. 并且 $u(R,t)=0$，$v(R,t)$

$=0, u_r|_{r=R}=\frac{\partial u}{\partial n}|_{r=R}<0, v_r|_{r=R}=\frac{\partial u}{\partial n}|_{r=R}<0.$

记 $U=r^{n-1}u_r$；$V=r^{n-1}v_r$，可证 $U<0$ 及 $V<0$.

事实上，若存在 $(r_0,t_0)(r_0>0)$ 使 $U(r_0,t_0)$ 或 $V(r_0,t_0)$ 取得非负极大，当 U 为非负极大，V 也必定非负，经过计算，则有

$$U_t-U_{rr}+\frac{n-1}{r}U_r=r^{n-1}[u_t-u_{rr}-\frac{n-1}{r}u_r]_r=r^{n-1}[uf_1(v)]_r$$

$$=r^{n-1}u_rf_1(v)+r^{n-1}uf'(v)v_r=f_1(v)U+uf'(v)V.$$

对于 V 也有类似的表达式，因此有

$$U_t-U_{rr}+\frac{n-1}{r}U_r-f_1(v)U=uf_1(v)V,$$

$$V_t-V_{rr}+\frac{n-1}{r}V_r-f_2(u)V=uf_2(u)U,\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T). \tag{2.4}$$

取 $\varepsilon>0, T-\varepsilon>t_0$，在 $(0,R)\times[0,T-\varepsilon]$ 上，(2.4) 右端是非负连续函数，也是一致有界. 因此由引理 1.1 知 $U(r,t)\equiv U(r_0,t_0)\geqslant 0$ 在 $[0,R)\times[0,t_0]$ 与 $U(r,0)=r^{n-1}\varphi_r<0$ 矛盾. 故有 $U(r,t)<0$，同理可证 $V(r,t)<0$，即有 $u_r<0, v_r<0$. 在 $(0,R)\times(0,T)$ 成立.

下面我们将在 $r=0$ 的邻域估计 $|u_r|$ 及 $|v_r|$ 的界. 为此引入函数

$$\begin{cases}J_1=U+\varepsilon r^n uF_1(v),\\ J_2=V+\varepsilon r^n vF_2(u),\end{cases} \tag{2.5}$$

其中 F_1,F_2 是正的待定函数. 通过计算有

$$J_{1t}=U_t+\varepsilon r^n u_tF_1(v)+\varepsilon r^n uF_1'(v)v_t$$

$$J_{1r}=U_r+\varepsilon r^{n-1}uF_1(v)+\varepsilon r^n u_rF_1(v)+\varepsilon r^n uF_1'(v)v_r,$$

$$J_{1rr}=U_{rr}+(n-1)n\varepsilon r^{n-2}uF_1(v)+2n\varepsilon r^{n-1}u_rF_1(v)+2n\varepsilon r^{n-1}uF_1'(v)v_r$$

$$+2\varepsilon r^n F_1'(v)u_rv_r+\varepsilon r^n uF_1''(v)v_r^2+\varepsilon r^n F_1'(v)uv_{rr}.$$

故有

$$J_{1t}-J_{1rr}+\frac{(n-1)}{r}J_{1r}=[f_1(v)-2\varepsilon F_1(v)]J_1+[uf_1(v)-2\varepsilon uF_1'(v)]J_2$$

$$-\varepsilon r^n u[vf_1(v)F_2(u)-vF_1'(v)f_2(u)-2\varepsilon F_1^2(v)-2\varepsilon F_1'(v)F_2(u)]$$

$$-\varepsilon r^n[2F_1'(v)u_rv_r+F_1''(v)uv_r^2].$$

因此，只要

$$\begin{cases}f_1(v)-2\varepsilon F_1'(v)\geqslant 0,\quad f_1(v)-2\varepsilon F_1(v)\geqslant 0,\\ v[f_1(v)F_2(u)-F_1'(v)f_2(u)]-2\varepsilon[F_1^2(v)+F_1'(v)F_2(u)]\geqslant 0,\end{cases} \tag{2.6}$$

即有

$$J_{1t}-J_{1rr}+\frac{(n-1)}{r}J_{1r}-b_1J_1-C_1J_2\leqslant 0. \tag{2.7}$$

同理，只要

$$\begin{cases}f_2(u)-2\varepsilon F_2'(u)\geqslant 0,\quad f_2(u)-2\varepsilon F_2(u)\geqslant 0,\\ u[f_2(u)F_1(v)-F_2'(u)f_1(v)]-2\varepsilon[F_2^2(u)+F_2'(u)F_1(v)]\geqslant 0,\end{cases} \tag{2.8}$$

即有

$$J_{2t}-J_{2rr}+\frac{(n-1)}{r}J_{2r}-b_2J_2-C_2J_1\leqslant 0. \tag{2.9}$$

又当 $t=0$ 时,$U(r,0)<0,V(r,0)<0$,又 $\varphi(r),\psi(r)$ 有界,故当 ε 充分小,可使 $J_1(r,0)\leqslant 0$, $J_2(r,0)\leqslant 0$.

当 $r=0$ 时,$U(0,t)=0,V(0,t)=0$,故有

$$J_1(0,t)=0,\quad J_2(0,t)=0.$$

当 $r=R$ 时,$U(R,t)=R^{n-1}u_r(R)<0,V(R,t)=R^n-v_r(R)<0$,则

$$J_1(R,t)<0,\quad J_2(R,t)<0.$$

因此由引理 1.1 知

$$J_1(r,t)\leqslant 0,\quad J_2(r,t)\leqslant 0\quad (r,t)\in(0,R)\times(0,T),$$

故有

$$-U\geqslant \varepsilon r^n uF_1(v);\quad -V\geqslant \varepsilon r^n vF_2(u),$$

则得

$$|u_r|=-u_r\geqslant \varepsilon ruF_1(v),\quad |v_r|=-v_r\geqslant \varepsilon rvF_1(u). \tag{2.10}$$

因此我们可以得到如下引理.

引理 2.2 设引理 2.1 的条件成立,并且(2.6),(2.8)成立.则有

$$|u_r|\geqslant \varepsilon ruF_1(v),\quad |v_r|\geqslant \varepsilon rvF_1(u)$$

定理 2.3 对于问题(1.1)—(1.3),若(1.4)成立,且 $\varphi_r<0,\psi_r<0$,又存在正函数 F_1,F_2 使(2.6),(2.8)成立.则 $r=0$ 是唯一 Blow-up 点.

证明 作辅助函数

$$G(u,v)=\frac{1}{v}\int_u^\infty\frac{ds}{F_2(s)}+\frac{1}{u}\int_v^\infty\frac{ds}{F_1(s)}. \tag{2.11}$$

显然 $G(u,v)\geqslant 0$,又设

$$\int_u^\infty\frac{ds}{F_2(s)}<\infty,\quad \int_v^\infty\frac{ds}{F_1(s)}<\infty.$$

则当 $u\to\infty$ 或 $v\to\infty$ 有 $G(u,v)\to 0$.又对 G 关于 r 微分得

$$\begin{aligned}(G(u,v))_r&=-\frac{v_r}{v^2}\int_u^\infty\frac{ds}{F_2(s)}-\frac{u_r}{vF_2(u)}-\frac{u_r}{u^2}\int_v^\infty\frac{ds}{F_1(s)}-\frac{v_r}{uF_1(v)}\\&\geqslant \varepsilon r\left[\frac{uF_1(v)}{vF_2(u)}+\frac{vF_2(u)}{uF_1(v)}\right]\geqslant 2\varepsilon r.\end{aligned} \tag{2.12}$$

对(2.12)从 0 到 r_0 积分得

$$G(u(r_0,t)v(r_0,t))-G(u(0,t),v(0,t))\geqslant\int_0^{r_0}2\varepsilon rdr=\varepsilon r_0^2,$$

对 $r_0>0,G(u(r_0,t),v(r_0,t))\geqslant \varepsilon r_0^2>0$.但当 $t\to T$ 有 $u\to\infty$.故有 $G(u(r_0,t),v(r_0,t))\to 0$,这就产生矛盾.因此当 $r_0>0$,它不可能是 Blow-up 点.而 $r=0$ 是唯一 Blow-up 点.证毕.

下面我们将进一步考察当 $r\to 0$ 时,关于 u 和 v 的变化速率.考虑如下方程组

$$\begin{cases}u_t=\Delta u+u\cdot(v+\mu)^{1+\alpha},\\ v_t=\Delta v+v\cdot(u+\lambda)^{1+\beta},\end{cases} \tag{2.13}$$

其中 $\lambda,\mu>0,1>\alpha>0,1>\beta>0$.

如前面作函数

$$G(u,v)=\frac{1}{v}\int_{u}^{\infty}\frac{ds}{F_2(s)}+\frac{1}{u}\int_{v}^{\infty}\frac{ds}{F_1(s)}.$$

对(2.13),取 $F_1(s)=(s+\mu)^{1+\alpha_1}$,$F_2(s)=(s+\lambda)^{1+\beta_1}$,而 $0<\alpha_1<\alpha$,$0<\beta_1<\beta$.同前面一样,仍有

$$(G(u,v))_r\geqslant\varepsilon r\left[\frac{uF_1(v)}{vF_2(u)}+\frac{vF_2(u)}{uF_1(v)}\right]\geqslant 2\varepsilon r. \tag{2.14}$$

对(2.14)从 0 到 r 积分得

$$G(u,v)-G(u,(0,t),v(0,t))\geqslant\varepsilon r^2.$$

即有

$$G(u(r,t),v(r,t))\geqslant\varepsilon r^2,$$

因此

$$\begin{aligned}G(u,v)&=\frac{1}{v}\int_{u}^{\infty}\frac{ds}{(s+\lambda)^{1+\beta_1}}+\frac{1}{u}\int_{v}^{\infty}\frac{ds}{(s+\mu)^{1+\alpha_1}}\\&=\frac{1}{\beta_1 v(\mu+\lambda)^{\beta_1}}+\frac{1}{\alpha_1 u(v+\mu)^{\alpha_1}}\geqslant\varepsilon r^2.\end{aligned} \tag{2.15}$$

由于 $r=0$ 是唯一 Blow-up 点,因此可设在 $r=0$ 的邻近 $u>1$,$v>1$.于是有

$$\frac{1}{\beta_1 v}+\frac{1}{\alpha_1 v^{\alpha_1}}\geqslant\varepsilon r^2,$$

故有

$$\frac{1}{v^{\alpha_1}}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha_1}\right)\geqslant\varepsilon r^2,\quad v\leqslant\left[\frac{\alpha_1+\beta_1}{\varepsilon\alpha_1\beta_1}\right]^{\frac{1}{\alpha_1}}r-\frac{2}{\alpha_1}. \tag{2.16}$$

同理可推得

$$u\leqslant\left[\frac{\alpha_1+\beta_1}{\varepsilon\alpha_1\beta_1}\right]^{\frac{1}{\beta_1}}r-\frac{2}{\beta_1}. \tag{2.17}$$

注 若方程(2.13)右端是 $(u+\lambda)(v+\mu)^{1+\alpha}$ 和 $(v+\mu)(u+\lambda)^{1+\beta}$.用同样方法仍可得相同结果.

在上述引理及定理成立的条件,我们综合得到如下定理.

定理 2.4 对于(2.13),(1.2),(1.3),$r=0$ 是唯一的 Blow-up 点.并且估计式(2.16),(2.17)成立.同时有

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{t\to T}}\|u(\cdot\,t)\|_{L^q(\Omega)}<\infty,\quad 当\ q<\frac{n\alpha_1}{2},\\&\overline{\lim_{t\to T}}\|v(\cdot\,t)\|_{L^{q'}(\Omega)}<\infty,\quad 当\ q'<\frac{n\alpha_1}{2}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

三 Blow-up 点集的性质

在本节我们对问题(1.1)-(1.3),讨论 Blow-up 点集的性质.

定理 3.1 对于问题(1.1)-(1.3),条件(1.4)成立,又设存在函数 F_1,F_2 使(2.6),(2.8)

成立,又 $\int_s^\infty \frac{ds}{F_1(s)} < \infty$, $\int_s^\infty \frac{ds}{F_2(s)} < \infty$,则其解的 Blow-up 点集是 Ω 的紧子集.

证明 任取 $y_0 \in \partial\Omega$,并设 $y_0=0$,而且在 y_0 处 Ω 与 $\{x_1>0\}$ 相切. 又设沿着 $\partial\Omega$, $\varphi>0$, $\psi>0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial n}<0$, $\frac{\partial\psi}{\partial n}<0$. 记 $\Omega_a^+=\Omega\cap\{x_1>a\}$,其中 $a<0$,且 $|a|$ 充分小. $\Omega_a^-=\{(x_1,x')\,|\,(2a-x_1,x')\in\Omega_a^+\}$,其中 $x'=(x_2\cdots x_n)$. 下面引入函数

$$\begin{cases}U(x,t)=u(x_1,x',t)-u(2a-x_1,x',t)\\ V(x,t)=v(x_1,x',t)-v(2a-x_1,x',t)\end{cases} \quad (x,t)\in\Omega_a^-\times(0,T), \tag{3.1}$$

则

$$\begin{aligned}U_t-\Delta U &= u(x_1,x',t)f_1(v(x_1,x',t))-u(2a-x_1,x',t)f_1(v(2a-x_1,x',t))\\ &= f_1(v)[u(x_1,x',t)-u(2a-x_1,x',t)]\\ &\quad + u(2a-x_1,x',t)[f_1(v(x_1,x',t))-f_1(v(2a-x_1,x',t))]\\ &= f_1(v)U+C_1u(2a-x_1,x',t)V.\end{aligned} \tag{3.2}$$

同样计算,可得

$$V_t-\Delta V=f_2V+C_2V(2a-x_1,x',t)U. \tag{3.3}$$

因为在 $\{x_1=a\}\times(0,T)$ 上

$$U(x,t)=u(a,x',t)-u(a,x',t)=0,\ V(x,t)=v(a,x',t)-v(a,x',t)=0, \tag{3.4}$$

在 $(\{x_1<a\}\cap 2\Omega_a^-)\times(0,T)$ 上,

$$U(x,t)=u(x_1,x',t)>0,\ V(x,t)=v(x_1,x',t)>0. \tag{3.5}$$

在 $\Omega_a^-\times\{t=0\}$ 上,

$$\begin{aligned}U(x,t)&=\varphi(x_1,x')-\varphi(2a-x_1,x')>0,\\ V(x,t)&=\psi(x_1,x')-\psi(2a-x_1,x')>0,\end{aligned} \tag{3.6}$$

(3.6)是由于 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}<0$ 及 $\frac{\partial\psi}{\partial n}<0$ 而成立.

则由引理 1.1 推得

$$U(x,t)>0,\ V(x,t)>0,\quad (x,t)\in\Omega_a^-\times(0,T).$$

又由于在 $x_1=a$ 上 $U=0$,在 Ω_a^- 内 $U>0$,因此有 $\frac{\partial U}{\partial x_1}<0$,因此在 $x_1=a$ 上,有

$$2\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{\partial U}{\partial x_1}<0.$$

同理也有

$$2\frac{\partial v}{\partial x_1}=\frac{\partial V}{\partial x_1}<0.$$

由于 a 是任意的,故存在适当小的 a_0 使

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}<0,\ \frac{\partial v}{\partial x_1}<0 \quad \text{在 } \Omega_{a_0}^+\times(0,T). \tag{3.7}$$

现在引入函数

$$\begin{cases}J_1=u_{x_1}+\varepsilon(x_1-a_0)uF_1(v),\\ J_2=v_{x_1}+\varepsilon(x_1-a_0)vF_2(u).\end{cases} \tag{3.8}$$

经过计算可得

$$
\begin{aligned}
J_{1t}-\Delta J=&[u_t-\Delta u]_{x_1}+\varepsilon(x_1-a_0)[u_t-\Delta u]F_1(v)+\varepsilon(x_1-a_0)u[v_t-\Delta v]F_1'(v)\\
&-2\varepsilon u_{x_1}F_1(v)-2\varepsilon F_1'(v)v_{x_1}-2\varepsilon(x_1-a)F_1'(v)\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}v_{x_i}\\
&-\varepsilon(x_1-a_0)uF_1''(v)\sum_{i=1}^{n}v_{x_i}^2.
\end{aligned}
$$

利用方程(1.1)及条件(2.6)和(3.8),可得

$$
J_{1t}-\Delta J_1-[f_1(v)-2\varepsilon F_1(v)]J_1-u[F_1'(v)-2\varepsilon F_1'(v)]J_2\leqslant 0. \tag{3.9}
$$

同样计算并利用(1.1),(2.8),(3.8)可得

$$
J_{2t}-\Delta J_2-[f_2(u)-2\varepsilon F_2(u)]J_2-v[f_2(u)-2\varepsilon F_2'(u)]J_1\leqslant 0. \tag{3.10}
$$

由条件(2.6),(2.8),知(3.9),(3.10)中 J_1,J_2 的系数非负.

由于在 $\Omega_{a_0}^+\times\{t=0\}$ 上,$\frac{\partial\varphi}{\partial n}<0,\frac{\partial\psi}{\partial n}<0$,当 ε 充分小,有 $J_1(x,t)<0,J_2(x,t)<0$. 在 $\{x_0=a_0\}\times(0,T)$ 上,当 ε 充分小,有 $J_1(x,t)<0,J_2(x,t)<0$. 在 $\{\partial\Omega\cap\partial\Omega_{a_0}^+\}\times(0,T)$ 上,要证仍然有 $J_1<0$ 及 $J_2<0$.

考虑如下问题

$$
\begin{cases}
\bar u_T-\Delta\bar u=0, & \text{在 } \Omega_{a_0}^+\times(0,T),\\
\bar u_t-\Delta\bar u=0, & \\
\bar u(x,t)=0,\ \bar v(x,t)=0, & \text{在 } \partial\Omega_{a_0}^+\times(0,T),\\
\bar u(x,0)=\varphi(x),\ \bar v(x,0)=\psi(x), & \text{在 } \Omega.
\end{cases} \tag{3.11}
$$

则由引理 1.3 知在 $\Omega_{a_0}^+\times(0,T)$ 上 $u(x,t)\geqslant\bar u(x,t),v(x,t)\geqslant\bar v(x,t)$. 再由引理 1.2 知 $\partial\Omega_{a_0}^+\times(0,T)$ 上 $\frac{\partial\bar u}{\partial n}\leqslant-C_0<0,\frac{\partial\bar v}{\partial n}\leqslant-C_0<0$. 而对于 u,v 有

$$
\frac{\partial u}{\partial n}<\frac{\partial\bar u}{\partial n}\leqslant-C_0<0\quad \frac{\partial v}{\partial n}<\frac{\partial\bar v}{\partial n}\leqslant-C_0<0. \tag{3.12}
$$

故在 $\partial\Omega_{a_0}^+\times(0,T)$ 上,当 ε 充分小

$$
\begin{cases}
J_1\leqslant-C_0(\frac{\partial x_1}{\partial n})^{-1}<0,\\
J_2\leqslant-C_0(\frac{\partial x_1}{\partial n})^{-1}<0.
\end{cases} \tag{3.13}
$$

那么由极值原理推得,在 $\Omega_{a_0}^+\times(0,T)$ 上 $J_1(x,t)<0,J_2(x,t)<0$,即有

$$
\begin{cases}
-u_{x_1}=|u_{x_1}|\geqslant\varepsilon(x_1-a_0)uF_1(v),\\
-v_{x_1}=|v_{x_1}|\geqslant\varepsilon(x_1-a_0)vF_1(u).
\end{cases} \tag{3.14}
$$

构造函数

$$
\bar G(u,v)=\frac{1}{v}\int_{u}^{\infty}\frac{ds}{F_2(s)}+\frac{1}{u}\int_{v}^{\infty}\frac{ds}{F_1(s).} \tag{3.15}
$$

当 $u\to\infty,v\to\infty$ 有 $\bar G(u,v)\to0$,对 $\bar G$ 关于 x_1 求导有

$$
\begin{aligned}
[\bar G(u,v)]_{x_1}&=\frac{v_{x_1}}{v^2}\int_{u}^{\infty}\frac{ds}{F_2(s)}-\frac{u_{x_1}}{vF_2(u)}-\frac{u_{x_1}}{u^2}\int_{v}^{\infty}\frac{ds}{F_1(s)}-\frac{v_{x_1}}{uF_1(v)}\geqslant-\frac{u_{x_1}}{uF_2(u)}-\frac{v_{x_1}}{uF_1(v)}\\
&\geqslant\varepsilon(x_1-a_0)[\frac{uF_1(v)}{vF_2(u)}+\frac{vF_2(u)}{uF_2(v)}]\geqslant 2\varepsilon(x-a_0).
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

在 $x'=0$ 上关于变量 x_1 从 x_1 到 y_1 积分($a_0<x_1<y_1<0$)得

$$\bar{G}[u(y_1,0,t),v(y_1,0,t)] - \bar{G}[u(x_1,0,t),v(x_1,0,t)] \geqslant \varepsilon(y_1-x_1)^2.$$

因此有

$$\bar{G}[u(y_1,0,t),v(y_1,0,t)] \geqslant \varepsilon(y_1-x_1)^2. \tag{3.17}$$

由于 $\bar{G}(\infty,\infty)=0$,因此若 $u(y_1,0,t)$,$v(y_1 1,0,t)$均为无穷,则有 $\bar{G}(\infty,\infty)=0\geqslant\varepsilon(y_1-x_1)^2$,这是矛盾的.若 $u(y_1,0,t)$为无穷,而 $v(y_1,0,t)$有限,这是不可能的,因为由 $u_t-\Delta u=uf_1(v)$,则推出 u 也上有限的.这也矛盾.而 $v(y_1,0,t)$无穷,而 $u(y_1,0,t)$有限,同样不可能.因此只有

$$\overline{\lim_{t\to T^-}} u(y_1,0,t)<\infty \text{ 和 } \overline{\lim_{t\to T^-}} v(y_1,0,t)<\infty. \tag{3.18}$$

只要改动证明,可推得$\frac{\partial u}{\partial v}<0$ 和$\frac{\partial v}{\partial v}<0$ 在$(\Omega_{a_0}^+\times(0,T))$.这里 v 是与 x_1 方向足够接近的方向.因此有

$$\overline{\lim_{\substack{t\to T^-\\ x\to(y_1,0)}}} u(x,t)<\infty \text{ 和 } \overline{\lim_{\substack{t\to T^-\\ x\to(y_1,0)}}} v(x,t)<\infty. \tag{3.19}$$

因此,我们推得$\{(y_1,x')\,|\,a_0<y_1<0,x'=0\}$不是 Blow-up 点,再由 y_0(初始点)选择的任意性,可知在 $\partial\Omega$ 的邻域 Ω^1 内,均不是 Blow-up 点,因此 Blow-up 点集是 Ω 的紧子集,而且是闭集.

参 考 文 献

[1] M. H. Protter, H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential equations*, Prenttice-Hall, 1967.

[2] A. Friedman, B. Mclesed, *Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations*, Indiana univ, Math., 34 (2), 425—445, 1985.

[3] L. A. Caffarrelli, A. Friedman, *Blow-up of solutions of nonlinear heat equations*, J. Math. Anal. Appl., 129, 409—149, 1988.

[4] C. V. Pao, *On nonlinear reaction-diffusion systems*, J. Math. Anal. Appl., 87(1), 165—198, 1982.

Blow-up of Solution of Semilinear Parabolic System

Zhang Kenong

(Dept. of Math., Xiamen University, 361005)

Abstract

We study the existence of Blow-up and the behavior of set of Blow-up points of solution for some semilinear parabolic equations. We disscuss also the single point Blow-up of solution.

Keywords blow-up, parabolic equation, semilinear poarabolic equation.