第15卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 15 No. 1
1995年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1995

一类非线性拟变分不等式及其应用*

向　方　霓

（葛洲坝水电工程学院基础部，宜昌 443002）

摘　要　本文研究了如下变分不等式问题：求 $u\in M$ 使得

$$a(u,v-u)+\langle Gu,v-u\rangle\geqslant\langle f,v-u\rangle,\quad\forall u\in M.$$

并将所得结论应用于二阶半线性椭圆型边值问题的求解.

关键词　变分不等式，边值问题，单调映射，半线性方程.

分类号　AMS(1991) 49R20/CCL O176.3

一　引　言

假设 H 是实的 Hilbert 空间，H' 是其对偶空间，其内积与范数分别以 $(\cdot)$ 及 $\|\cdot\|$ 表示，H 与 H' 的对偶积以 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示，M 是 H 的非空闭凸子集. Λ 表示 H 与 H' 之间的 Riesz 同构.

设 $a(u,v)$ 是 H 上的强制连续双线性型，即存在常数 $\alpha>0$ 及 $\beta>0$，使得

$$a(u,v)\geqslant\alpha\|v\|^2\text{ 且 }a(u,v)\leqslant\beta\|u\|\cdot\|v\|,\quad\forall u,v\in H.$$

显然 $\alpha\leqslant\beta$.

算子 $G:M\to H'$ 是非线性单调映射且 Lipschitz 连续，即满足

$$\langle Gu-Gv,\ u-v\rangle\geqslant 0,\quad\forall u,v\in M,$$

$$\|Gu-Gv\|\leqslant\xi\|u-v\|,\quad\forall u,v\in M,$$

其中 Lipschitz 常数 $\xi>0$.

设 $f\in H'$ 是 H 上的有界线性泛函. 因为 $a(u,v)$ 是 H 上的双线性型，故由 Riesz 表示定理，有线性算子 L 使得

$$a(u,v)=\langle Lu,v\rangle,\ \forall u,v\in H.$$

本文将先研究如下非线性拟变分不等式：求 $u\in M$，使得

$$a(u,v-u)+\langle Gu,v-u\rangle\geqslant\langle f,v-u\rangle,\quad\forall v\in M.$$

二　变分不等式解的存在性

引理　假设 $\xi<\alpha$，ρ 为满足 $0<\rho<\dfrac{2(\alpha-\xi)}{\beta^2-\xi^2}$ 的实数且 $\rho\xi<1$，则存在常数 $\theta\in(0,1)$，使得

* 1992年3月2日收到. 94年4月7日收到修改稿.

$$\|\varphi(u_1)-\varphi(u_2)\| \leqslant \theta\|u_1-u_2\|, \quad \forall\, u_1,u_2 \in H,$$

其中对$\forall\, u\in H$，$\varphi(u)\in H'$定义如下：

$$\langle\varphi(u),v\rangle=(u,v)-\rho a(u,v)-\rho\langle Gu,v\rangle+\rho\langle f,v\rangle,$$

常数α,β,ξ分别是$a(u,v)$及算子G的强制、有界、Lipschitz常数.

证明 对任意$u_1,u_2\in H$

$$\begin{aligned}\langle\varphi(u_1)-\varphi(u_2),v\rangle &= (u_1-u_2,v)-\rho a(u_1-u_2,v)-\rho\langle Gu_1-Gu_2,v\rangle\\ &= ([u_1-u_2-\rho(\Lambda Lu_1-\Lambda Lu_2)],v)-\rho(\Lambda Gu_1-\Lambda Gu_2,v),\end{aligned}$$

故

$$|\langle\varphi(u_1)-\varphi(u_2),v\rangle| \leqslant \|u_1-u_2-\rho\Lambda(Lu_1-Lu_2)\|\cdot\|v\|+\rho\xi\|u_1-u_2\|\cdot\|v\|,$$

又

$$\|u_1-u_2-\rho\Lambda(Lu_1-Lu_2\|^2 \leqslant (1+\rho^2\beta^2-2\alpha\rho)\|u_1-u_2\|^2.$$

所以

$$\begin{aligned}|\langle\varphi(u_1)-\varphi(u_2),v\rangle| &\leqslant (\sqrt{1+\rho^2\beta^2-2\alpha\rho}+\rho\xi)\|u_1-u_2\|\cdot\|v\|\\ &= \theta\|u_1-u_2\|\cdot\|v\|;\end{aligned}$$

其中$\theta=\sqrt{1+\rho^2\beta^2-2\alpha\rho}+\rho\xi<1$，当$0<\rho<\dfrac{2(\alpha-\xi)}{\beta^2-\xi^2}$，$\rho\xi<1$以及$\xi<\alpha$时. 故有

$$\|\varphi(u_1)-\varphi(u_2)\| = \sup_{v\in H}\frac{|\langle\varphi(u_1)-\varphi(u_2),v\rangle|}{\|v\|} \leqslant \theta\|u_1-u_2\|.$$

定理1 设$a(u,v)$，非线性算子G及集合M，均如前所述，且常数α,β、ξ满足引理中的条件，则存在唯一的$u\in M$，使得

$$a(u,v-u)+\langle Gu,v-u\rangle \geqslant \langle f,v-u\rangle, \quad \forall\, v\in M.$$

证明 *唯一性* 假设$u_i\in M(i=1,2)$，$u_1\neq u_2$均为上述变分不等式的解，则有

$$a(u_1,v-u_1)+\langle Gu_1,v-u_1\rangle \geqslant \langle f,v-u_1\rangle, \quad \forall\, v\in M, \tag{1}$$

$$a(u_2,v-u_2)+\langle Gu_2,v-u_2\rangle \geqslant \langle f,v-u_2\rangle, \quad \forall\, v\in M. \tag{2}$$

在(1)中取$v=u_2$，在(2)中取$v=u_1$，然后两式相加得：

$$-a(u_1-u_2,u_1-u_2)-\langle Gu_1-Gu_2,u_1-u_2\rangle \geqslant 0.$$

由$a(u,v)$的强制性及G的单调性知上式矛盾. 从而唯一性得证.

存在性 对引理中每个固定的ρ，$u\in H$及$\varphi(u)\in H'$，据[1]中引理1，存在唯一$w\in M$，使得

$$(w,v-w) \geqslant \langle\varphi(u),v-w\rangle, \quad \forall\, w\in M,$$

其中$w=P_M\Lambda\varphi(u)\triangleq Tu$，这里$P_M$是从$H$到$M$的投影算子，由于它是非扩张的，故对任意$u_1,u_2\in H$

$$\begin{aligned}\|Tu_1-Tu_2\| &= \|P_M\Lambda\varphi(u_1)-P_M\Lambda\varphi(u_2)\| \leqslant \|\Lambda\varphi(u_1)-\Lambda\varphi(u_2)\|\\ &\leqslant \|\varphi(u_1)-\varphi(u_2)\| \leqslant \theta\|u_1-u_2\|.\end{aligned}$$

因为$0<\theta<1$，故T是一个压缩映象，由Banach压缩映象原理，存在不动点$u=Tu\in M$. 从而有

$$a(u,v-u)+\langle Gu,v-u\rangle \geqslant \langle f,v-u\rangle, \quad \forall\, v\in M.$$

注 当$G\equiv0$时，本文所论问题即为Lions-Stampacchia变分不等式[3]. 而当$a(u,v)\equiv0$时，变分不等为关于单调算子的变分不等式[2].

三 应 用

我们将上述定理应用于偏微分方程的边值问题.研究如下的半线性 Dirichret 问题,设问题定义在具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域 $\Omega\subset R^N(N\geqslant 1)$上:

$$\begin{cases} Lu + Gu = f, \\ u|\partial\Omega = 0, \end{cases}$$

其中线性算子 $L:H_0^1(\Omega)\to H'(\Omega)$

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{j=1}^{N}a_j\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 u,$$

这里 $a_{ij}\in L^\infty(\Omega)\cap C(\Omega)$, $a_j, a_0\in L^\infty(\Omega)\,(i,j=1,2,\cdots,N)$. 与 L 对应的双线性型 $a(u,v)$定义如下:

$$a(u,v) = \int_\Omega\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Omega\sum_{j=1}^{N}a_j\frac{\partial u}{\partial x_j}v(x)dx + \int_\Omega a_0(x)u(x)v(x)dx$$

进一步假设存在 $\alpha_1>0$,使得

$$\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha_1\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2,\ \forall\ \xi_i\in R^N.$$

从而我们可以证明 $a(u,v)$是 $H_0^1(\Omega)$上的强制连续双线性型,因此 L 是一致椭圆的.

非线性算子 $Gu(x)=F(x,u(x))$,这里函数 $F(x,u)$是定义在 $\bar{\Omega}\times R$ 上的可测连续函数,且关于 u 单调 Lipschitz 连续,故 G 是单调 Lipschitz 连续的.

令 $M=\{v\in H_0^1(\Omega):\psi_1(x)\leqslant v(x)\leqslant\psi_2(x),\ x\in\Omega\}$,其中 $\psi_1,\psi_2\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$; $\psi_1(x)\leqslant 0\leqslant\psi_2(x)$, $\forall\ x\in\Omega$.

由定理 1,存在唯一的 $u\in M$,使得

$$a(u,v-u) + \langle Gu,v-u\rangle \geqslant \langle f,v-u\rangle,\quad \forall\ v\in M.$$

所以,我们有如下结论:

定理 2 对本节所述 L,G,M,存在唯一的 $u\in M$,使得

$$\langle Lu,v-u\rangle + \langle Gu,v-u\rangle \geqslant \langle f,v-u\rangle,\quad \forall\ v\in M. \qquad (*)$$

特别地,若取 $M=H_0^1(\Omega)$,则存在唯一 $u\in H_0^1(\Omega)$,使得

$$\langle Lu,v\rangle + \langle Gu,v\rangle = \langle f,v\rangle,\quad \forall\ v\in H_0^1(\Omega). \qquad (**)$$

即半线性 Dirichlet 问题在 $H_0^1(\Omega)$上有弱解.

事实上,对于任意给定的 $v\in H_0^1(\Omega)$,取(*)式中的 u 分别为 $u+v$ 及 $u-v$ 则得到(**)式.

许多问题可以化归为如上的 Dirichlet 问题[4,5]. 我们的结论不同于[5,4],是对[2,3]的发展与统一.

参 考 文 献

[1] Chen Dianke and Xiang Fangni, *Quasi-mildly nonlinear complementarity problem of the set-valued mapping*, J. Math. Anal. Appl., 181(1994), 219—226.

[2] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press, 1980.

[3] J. L. Lions, G. Stampacchia, *Variational inequalities*, Comn. Pure Appl. Math., 20(1967), 493—519.

[4] G. Duvant, J. L. Lions, 力学和物理学中的变分不等方程，科学出版社，北京 1987.

[5] 王耀东，变分不等方程，高等教育出版社，北京 1987.

A Class of Nonlinear Quasi-Variational Inequalities and Applications

Xiang Fangni

(Gezhouba Institute of Hydro-Electric Eng., Yichang 443000)

Abstract

We consider the following nonlinear quasi-variational inequalities, find $u \in M$, such that

$$a(u, v-u) + \langle Gu, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle, \forall v \in M.$$

As applications of the above theorem, the boundary value problems for second order elliptic equations have been solved.

Keywords variational inequalities, boundary value problem, monontone mappings, semilinear equations.