

在某些正则区域上的多元 B 形式曲面*

罗笑南 姜显明

(西安电子科技大学, 西安 710071)

摘 要 本文首先通过多面体区域上抬高维数的技巧给出了多元 B 形式中曲面的一般性定义. 由此我们构造了平行四边形域上、正六边形域上和正八边形域上 B 形式的同次曲面格式, 并给出了其基函数的递推公式和求导公式. 同时我们也给出了正六边形域上插值角点的 B 形式同次曲面的表示式.

关键词 B 形式, Bezier 曲面, Bernstein 多项式.

分类号 AMS(1991) 65D17/CCL O241.5

§1 引言

在[1]中我们给出了多元 B 形式曲面的一般性定义和在一个多面体中通过抬高维数构造 B 形式曲面的方法. 在本文中我们把这种方法应用于某些正则区域(平行四边形域、正六边形域和正八边形域)构造了一些丰富多彩的曲面族, 并讨论了其性质.

我们采用 R^m 表示 m 维实向量空间, Z_+^m 表示全体 m 重非负整数集合. $a = (a_1, \dots, a_m) \in Z_+^m$, 记 $|a| = \sum_{j=1}^m a_j$, $a! = a_1! \cdots a_m!$, $\binom{n}{a} = \frac{n!}{a!}$, 这里 $n \in Z_+$.

定义 1 设 m 维 C^r 类流形 M 到 n 维 Euclid 空间 R^n 内的浸入为映射 P, M 与 P 合并的概念称为 R^n 的曲面(或称浸入的子流形), 当 $m=1, 2, \dots, n-1$ 时, 这里皆称为曲面.

定义 2 若 Ω 是一个 n 维单纯形, w 是一个 C^r 类流形, 且 $w \subset \Omega$, 那么

$$P(u) = \sum_{|a|=k} P_a B_a(\tau), \quad u \in w$$

是 w 上的 k 次 B 形式曲面.

这里 $\tau = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ 为 u 在 Ω 中的重心坐标, 指标 $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in Z_+^{n+1}$,

$$B_a(\tau) = \binom{|a|}{a} \tau^a = \binom{|a|}{a} \cdot \xi_0^{a_0} \cdot \xi_1^{a_1} \cdots \xi_n^{a_n}$$

称为多元 Bernstein 多项式.

* 1993年7月14日收到.

§ 2 平行四边形域上的 B 形式同次曲面

我们取 $\sigma = [v^1, v^2, v^3, v^4] = \{v | v = \sum_{j=1}^4 \xi_j v^j, \sum_{j=1}^4 \xi_j = 1, \xi_j \geq 0\}$, $\sigma \subset R^2$ 且 σ 为平行四边形,

抬高 σ 的维数可以得到单纯形 $\Omega = [u^1, u^2, u^3, u^4] = \{u | u = \sum_{j=1}^4 \xi_j u^j, \sum_{j=1}^4 \xi_j = 1, \xi_j \geq 0\}$. 根据定

义 2, 选择 $w = \{u | u = \sum_{j=1}^4 \xi_j u^j, \xi_1 + \xi_3 = \xi_2 + \xi_4 = \frac{1}{2}\}$ 可以得到 w 上的 n 次 B 形式曲面

$$P(u) = \sum_{|\alpha|=n} P_\alpha B_\alpha(u), \quad u \in w.$$

若给定正规的网格顶点 $P_{ij}(i, j=0, 1, \dots, n)$ 且令 $P_{i_1 i_2 i_3 i_4}|_A = P_{ij}$, 其中 A 表示下述指示的约束条件

$$A = \begin{bmatrix} i_2 + i_3 = i \\ i_3 + i_4 = j \\ i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = n \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

同时对重心坐标 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ 做如下变换

$$\begin{cases} \varepsilon = 1 - 2\xi_1, \\ \eta = 1 - 2\xi_2, \end{cases} \quad \varepsilon, \eta \in [0, 1], \quad (2.2)$$

则可获得平行四边形域上的 B 形式同次曲面

$$P(u) = \sum_{i,j=0}^n P_{ij} H_{ij}^*(\varepsilon, \eta), \quad \varepsilon, \eta \in [0, 1], \quad (2.3)$$

其中

$$\begin{cases} H_{ij}^*(\varepsilon, \eta) = \sum_{k=\max(0, i+j-n)}^{\min(i, j)} C_{ijk}^* (1-\varepsilon)^{n-i-j+k} \varepsilon^k \cdot (1-\eta)^{i-k} \cdot \eta^{j-k}, \\ C_{ijk}^* = \frac{n!}{2^n (i-k)! k! (j-k)! (n-i-j+k)!}. \end{cases} \quad (2.4)$$

容易证明基函数 $H_{ij}^*(\varepsilon, \eta)$ 具有如下性质:

1. 非负性和归一性

$$H_{ij}^*(\varepsilon, \eta) \geq 0, \quad (i, j = 0, 1, \dots, n) \text{ 且 } \sum_{i,j=0}^n H_{ij}^*(\varepsilon, \eta) = 1.$$

$$2. \quad H_{ij}^*(\varepsilon, \eta) \geq \frac{1}{2^n} B_{in}(\varepsilon) B_{jn}(\eta), \quad \varepsilon, \eta \in [0, 1], \quad i, j = 0, 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

这里 $B_{in}(\varepsilon), B_{jn}(\eta)$ 是 Bernstein 基函数. 由于

$$(1-\varepsilon)^{n-i-j+k} \cdot \varepsilon^k (1-\eta)^{i-k} \eta^{j-k} \geq (1-\varepsilon)^{n-i} \varepsilon^i (1-\eta)^{n-j} \eta^j,$$

且 $\sum_{k=\max(0, i+j-n)}^{\min(i, j)} C_{ijk}^* = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i} \binom{n}{j}$, 故得知 (2.5) 式成立.

3. 递推公式

$$H_{ij}^*(\varepsilon, \eta) = \frac{\varepsilon}{2} H_{i-1, j-1}^{*-1}(\varepsilon, \eta) + \frac{1-\varepsilon}{2} H_{ij}^{*-1}(\varepsilon, \eta) + \frac{\eta}{2} H_{i, j-1}^{*-1}(\varepsilon, \eta) + \frac{1-\eta}{2} H_{i-1, j}^{*-1}(\varepsilon, \eta). \quad (2.6)$$

4. 求导公式

$$\begin{cases} \frac{\partial H_{ij}^n(\varepsilon, \eta)}{\partial \varepsilon} = \frac{n}{2}(H_{i-1, j-1}^{n-1}(\varepsilon, \eta) - H_{ij}^{(n-1)}(\varepsilon, \eta)), \\ \frac{\partial H_{ij}^n(\varepsilon, \eta)}{\partial \eta} = \frac{n}{2}(H_{i-1, j}^{n-1}(\varepsilon, \eta) - H_{i-1, j}^{(n-1)}(\varepsilon, \eta)). \end{cases} \quad (2.7)$$

若选择 $\bar{w} = \{u | u = \sum_{j=1}^4 \xi_j u^j, \xi_1 + \xi_2 = \frac{P_1}{n}, \xi_2 + \xi_4 = \frac{P_2}{n}, P_1 + P_2 = n\}$, 其中 $P_1, P_2 \in \mathbb{Z}$, 则我们可以把平行四边形域上的 B 形式同次曲面推广到更一般形式.

取指标的约束条件仍为 (2.1) 式, 对重心坐标 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ 做如下变换

$$\begin{cases} \beta_1 = P_1 - n\xi_1, & \beta_1 \in [0, P_1], \\ \beta_2 = P_2 - n\xi_4, & \beta_2 \in [0, P_2], \end{cases} \quad (2.8)$$

则可获得两向剖分区域 (参见图 2.1) 上的 B 形式同次曲面

$$P(u) = \sum_{i,j=0}^n P_{ij} H_{ij}^{(P_1, P_2)}(\beta_1, \beta_2), \quad (2.9)$$

其中

$$\begin{cases} H_{ij}^{(P_1, P_2)}(\beta_1, \beta_2) = \sum_{k=\max(0, i+j-n)}^{\min(i, j)} \bar{C}_{ijk}^n (P_1 - \beta_1)^{n-i-j+k} \beta_1^k (P_2 - \beta_2)^{i-k} \beta_2^{j-k}, \\ \bar{C}_{ijk}^n = \frac{n!}{(i-k)! k! (n-i-j+k)! (j-k)!}. \end{cases} \quad (2.10)$$

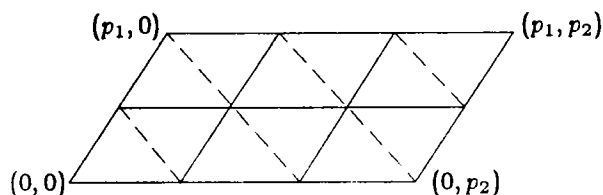


图 2.1

$H_{ij}^{(P_1, P_2)}(\beta_1, \beta_2)$ 存在如下递推公式

$$\begin{aligned} H_{ij}^{(P_1, P_2)}(\beta_1, \beta_2) &= \frac{1}{n} [\beta_1 H_{i-1, j-1}^{(P_1-1, P_2)}(\beta_1, \beta_2) + (P_1 - \beta_1) H_{ij}^{(P_2-1, P_2)}(\beta_1, \beta_2) \\ &\quad + \beta_2 H_{i-1, j}^{(P_1, P_2-1)}(\beta_1, \beta_2) + (P_2 - \beta_2) H_{i-1, j}^{(P_1, P_2-1)}(\beta_1, \beta_2)], \\ &\beta_1 \in [0, P_1], \beta_2 \in [0, P_2], i, j = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.11)$$

这正是两向剖分区域上 Box 样条的递推公式, 所以当 $P_1 = P_2$ 时 (2.9) 式表示的是两向网格区域上的 Box 样条.

§ 3 正六边形域上的 B 形式同次曲面

给定正六边形域 $\sigma = [v^1, v^2, \dots, v^6] = \{v | v = \sum_{j=1}^6 \xi_j v^j, \sum_{j=1}^6 \xi_j = 1, \xi_j \geq 0\}$, $\sigma \subset \mathbb{R}^2$, 抬高 σ 的维数成为高维单纯形

$$\Omega = [u^1, u^2, \dots, u^6] = \{u | u = \sum_{j=1}^6 \xi_j u^j, \sum_{j=1}^6 \xi_j = 1, \xi_j \geq 0\}.$$

选择 $w = \{u | u = \sum_{j=1}^6 \xi_j u^j, \xi_1 + \xi_2 = \xi_3 + \xi_4 = \xi_5 + \xi_6 = \frac{1}{3}\}$, 并给定 $\bar{P}_b(|b| = n, b \in Z_+^6)$, 则有 w 上的 n 次 B 形式曲面

$$P(u) = \sum_{|b|=n} P_b \frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_6!} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_6^{i_6}. \quad (3.1)$$

令 $P_{i_1 i_2 \dots i_6}|_A = P_{\mathbf{m}k}$, 其中 A 表示下述指标约束条件

$$A = \left[\begin{array}{l} i_4 + i_5 + i_6 = k \\ i_3 + i_4 + i_5 = l \\ i_2 + i_3 + i_4 = h \\ i_1 + i_2 + \dots + i_6 = n \end{array} \right], \quad (3.2)$$

并对 u 的重心坐标 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6)$ 做如下变换

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 - 3\xi_2, \\ \alpha_2 = 1 - 3\xi_4, \\ \alpha_3 = 1 - 3\xi_6, \end{cases} \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0, 1], \quad (3.3)$$

则可得如下同次曲面

$$P(u) = \sum_{k, l, h=0}^n P_{\mathbf{m}k} H_{\mathbf{m}k}^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0, 1], \quad (3.4)$$

其中

$$H_{\mathbf{m}k}^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_A \frac{n!}{3^n i_1! i_2! \dots i_6!} \alpha_1^{i_1} (1 - \alpha_1)^{i_2} \alpha_2^{i_3} (1 - \alpha_2)^{i_4} \alpha_3^{i_5} (1 - \alpha_3)^{i_6}. \quad (3.5)$$

基函数 $H_{\mathbf{m}k}^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 具有如下性质:

1. $\sum_{k, l, h=0}^n H_{\mathbf{m}k}^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$, 且 $H_{\mathbf{m}k}^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \geq 0$.
2.
$$H_{\mathbf{m}k}^*(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{\alpha_1}{3} H_{\mathbf{m}k-1}^{*-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \frac{(1-\alpha_1)}{3} H_{\mathbf{m}k-1}^{*-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ + \frac{\alpha_2}{3} H_{\mathbf{m}k-1}^{*-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \frac{(1-\alpha_2)}{3} H_{\mathbf{m}k-1}^{*-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ + \frac{\alpha_3}{3} H_{\mathbf{m}k-1}^{*-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \frac{(1-\alpha_3)}{3} H_{\mathbf{m}k-1}^{*-1}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0, 1]. \quad (3.6)$$

下面我们讨论正六边形域上三向网格节点上的 B 形式同次曲面. 首先考虑正六边形域上三向网格节点的下标编码(参看图 3.1). 下标编码规则:

1. 选择节点下标 $a \in Z_+^3$, 正六边形三向网格节点中最左边的节点定为编码起点, 其下标为 $a = (0, 0, 0)$.

2. 沿着右上方每前进一步下标的第一分量增加 1, 沿着右下方每前进一步下标的第三分量增加 1, 向正右方前进一步下标第二分量增加 1.

若 $a = b + k(1, -1, 1)$ $k \in Z$, 则称 a 等价于 b , 记为 $a \approx b$, 等价的下标在网格中归于同一点.

为了讨论方便把节点与节点下标等同起来.

引理 1 不同的正六边形三向网格节点不等价.

由规则 2 可知处于同一条网线上的节点不等价. 对于不处于同一条网线上的节点 a, b , 根据剖分方式(见图 3.1)可知可找到两条网线分别经过 a, b 交于 c . 不妨设经过 a, c 的网线是向右上方的网线, 所经过 b, c 的网线为右下方向的网线, 从而可知 $a=c+(k, 0, 0), b=c+(0, 0, j)$ 这表明 a 不等价于 b . 其他情况可作类似讨论.

引理 2 正六边形三向网格节点的总数

$$N = 3n^2 + 3n + 1. \quad (3.7)$$

由图 3.1

$$\begin{aligned} N &= (n+1) + (n+2) + \cdots + 2n + 2n + 1 + 2n + \cdots + (n+2) + (n+1) \\ &= 3n^2 + 3n + 1. \end{aligned}$$

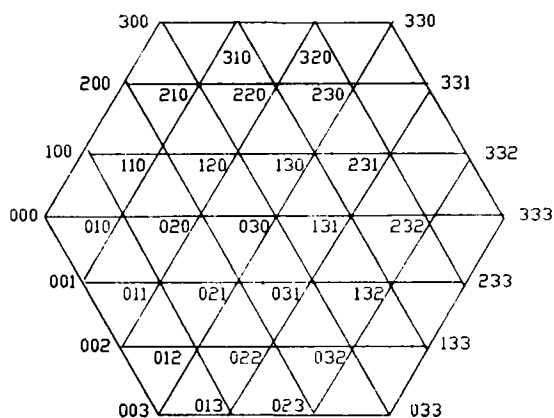


图 3.1

设 $S = \{(k, l, h) | (k, l, h) \in \mathbb{Z}_+^3, \text{ 且 } k, l, h \leq n\}$, 由给定的等价关系将 S 分割为等价类, 现在来计算 S 中等价类的数目. 用 $\{a\}$ 表示与 a 等价的元素全体.

1. 若存在 $(k, 0, h) \in \{a\}$, 选择 $(k, 0, h)$ 为代表元, 这样的等价类共有 $(n+1)^2$ 种.
2. 若不存在 $(k, 0, h) \in \{a\}$, 那么代表元的选择可分下面三种情况.
 - (1) $(n, l, h) \in \{a\}, 0 < l \leq n, 0 \leq h < n$, 共有 n^2 个等价类.
 - (2) $(k, l, n) \in \{a\}, 0 \leq k < n, 0 < l \leq n$, 共有 n^2 个等价类.
 - (3) $(n, l, n) \in \{a\}, 0 < l \leq n$, 共有 n 个等价类.

综上所述可得如下结论

引理 3 等价关系 $a \approx a + k(1, -1, 1)$ 将 S 划分为 $3n^2 + 3n + 1$ 个等价类.

定理 1 上述在正六边形三向网格上的下标编码规则使 S 中的等价类与网格节点 1-1 对应.

当 $a \approx b$ 时我们取 $P_a = P_b$ 可得正六边形三向网格上的曲面表示

$$P(u) = \sum_{\{a\} \in S} P_a \sum_{a \in \{a\}} H_a^*(a_1, a_2, a_3). \quad (3.8)$$

同样若选择

$$\bar{w} = \{u | u = \sum_{j=1}^6 \xi_j u^j, \xi_1 + \xi_2 = \frac{P_1}{n}, \xi_3 + \xi_4 = \frac{P_2}{n}, \xi_5 + \xi_6 = \frac{P_3}{n}, P_1 + P_2 + P_3 = n\}.$$

我们可将正六边形区域上的 B 形式同次曲面推广到更一般的形式

$$P(u) = \sum_{k,l,h=0}^n P_{k,l,h} II_{klh}^{(p_1, p_2, p_3)}(\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

对于正六边形三向网格上的曲面表示我们有

$$P(u) = \sum_{\{a\} \in S} P_a \sum_{s \in \{a\}} II_0^{(p_1, p_2, p_3)}(\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

这里

$$\begin{cases} \beta_1 = (P_1 - n\xi_1)/n, \\ \beta_2 = (P_2 - n\xi_3)/n, \\ \beta_3 = (P_3 - n\xi_5)/n. \end{cases}$$

§ 4 正八边形域上的 B 形式同次曲面

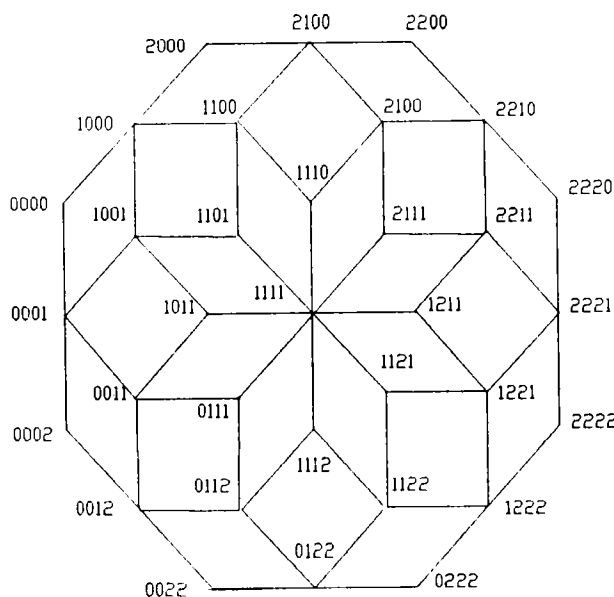


图 4.1

给定正八边形域 $\sigma = [v^1, \dots, v^8] \subset R^2$, 抬高其维数使其成为高维单纯形 $\Omega = [u^1, \dots, u^8]$, 选择 $w = \{u | u = \sum_{j=1}^8 \xi_j u^j, \xi_1 + \xi_2 = \xi_3 + \xi_4 = \xi_5 + \xi_6 = \xi_7 + \xi_8 = \frac{1}{4}\}$, 并给定 $\bar{P}_b (|b|=n, b \in Z_+^8)$, 则有 w 上的 B 形式曲面 $P(u) = \sum_{|b|=n} \bar{P}_b B_b(\tau)$. 令 $\bar{P}_{i_1 i_2 \dots i_4} |_A = P_{ijkl}$, 其中 A 表示如下约束条件

$$A = \begin{bmatrix} i_5 + i_6 + i_7 + i_8 = i \\ i_4 + i_5 + i_6 + i_7 = j \\ i_3 + i_4 + i_5 + i_6 = k \\ i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = l \\ i_1 + i_2 + \dots + i_8 = n \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

并对 u 的重心坐标做如下变换, $\alpha_i = 1 - 4\xi_{2i}, i=1, 2, 3, 4$. 则可得如下同次曲面

$$P(u) = \sum_{i,k,l=0}^n P_{ijk} H_{ijk}^*(a_1, a_2, a_3, a_4), \quad a_i \in [0, 1], \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.2)$$

其中 $H_{ijk}^*(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{\lambda} B_{i_1 i_2 \dots i_q}(\tau)$. 也可以对正八边形进行四向网格剖分(参看图 4.1), 从而得到四向网格上的同次曲面.

由于其显式表示很复杂, 应用起来不方便, 在这里我们就不做深入讨论了.

参 考 文 献

- [1] 罗笑南, 计算机辅助几何设计中曲线与曲面, 大连理工大学博士论文, 91—108, 1991, 11.
- [2] 王仁宏、罗笑南、苏志勋, 飞机翼身融合体外形计算, CIEM 工程理论手册, 大连理工大学, 1991.
- [3] 贾荣庆, 多元样条的 B 网表示, 科学通报, 32(1987), 804—807.
- [4] R. E. Barnhill, *Surfaces in computer aided geometric design: A survey with new results*, CAGD, 2(1985), 1—17.
- [5] R. E. Barnhill and H. S. Ou, *Surfaces defined on surface*, CAGD, 7(1990), 323—336.

Surface in Multivariate B-form on Some Regular Regions

Luo Xiaonan . Jiang Yuming

(Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract

A general definition of surfaces of multivariate B-form for higher dimensional of polyhedron region is given. Thereby the forms of same degree surface of B-form on parallelogram region, regular hexagon region and regular octagon region are derived. Recurrence formula and derivation formula of its base function are given. Representation formula of same degree surface of B-form of interpolation angular points on regular hexagon region is given simultaneously.

Keywords B-form, Bezier surface, Bernstein polynomial.