第15卷第1期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 1
1995年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1995

关于 Bernstein 多项式导数的迭代极限*

何 甲 兴
(吉林工业大学数学系，长春 130025)

设 f 定义在$[0,1]$上，f 的 Bernstein 算子为

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)P_{nk}(x), \tag{1}$$

其中 $P_{nk}=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

自从 Kelisky 和 Rivlin[1] 研究了算子 $B_n(f,x)$的迭代以来，一些作者[2-5]除给出不同的证法并推广到其它型的多项式算子和样条函数外，又考虑了多元 Bernstein 多项式的迭代极限. 本文则考虑 $B_n(f,x)$的导数的迭代极限和迭代误差估计.

设 $h=1/n$，s 为小于 n 的非负整数，$\Delta_h^s f(x)$为函数 $f(x)$基于 $f(t),f(t+h),\cdots,f(t+sh)$的点 t 处的 s 阶向前差分. 经过计算，$B_n(f,x)$的 s 阶导数为

$$B_n^{(s)}(f,x)=\frac{n!}{(n-s)!}\sum_{k=0}^{n-s}\Delta_h^s f\left(\frac{k}{n}\right)P_{n-s,k}(x). \tag{2}$$

将 $B_n^{(s)}(f,x)$的迭代定义为

$$B_n^{(s)[j]}(f,x)=B_n^{(s)}(B_n^{(s)[j-1]}(f,x),x),\ j=1,2,\cdots, \tag{3}$$

j 表示迭代次数. 关于迭代极限和误差有

定理 1 对固定的 n，记 $R_j(x)=\frac{n!}{(n-s)!}\left[(1-x)\Delta_h^s f(0)+x\Delta_h^s f\left(\frac{n-s}{n}\right)\right]-B_n^{(s)[j]}(f,x)$，则 $|R_j(x)|\leqslant\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-s-2}\left|F\left(0,\frac{k+1}{n-s},1\right)\right|\left(1-\frac{1}{n-s}\right)^j x(1-x)$. 其中 $F(x)=\frac{n!}{(n-s)!}\Delta_h^s f\left(\frac{x(n-s)}{n}\right)$，$0\leqslant x\leqslant 1$，而 $F\left(0,\frac{k+1}{n-s},1\right)$表示函数 $F(x)$在三点$\left\{0,\frac{k+1}{n-s},1\right\}$处的二阶差商.

定理 2 对固定的 n 有 $\lim\limits_{j\to\infty}B_n^{(s)[j]}(f,x)=\frac{n!}{(n-s)!}\left[(1-x)\Delta_h^s f(0)+x\Delta_h^s f\left(\frac{n-s}{n}\right)\right]$，若 f 的 s 阶导数 $f^{(s)}(x)$在$[0,1]$上连续，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{j\to\infty}B_n^{(s)[j]}(f,x)=(1-x)f^{(s)}(0)+xf^{(s)}(1)$.

参 考 文 献

[1] R. Kelisky and T. J. Rivlin, Pacific J. of Math, 21(1976), 3:511—520.
[2] S. Karlin and Z. Zigler, ibid, 1970, 3:310—339.
[3] 胡莹生、徐叔贤，应用数学学报，1(1978)，4:240—249.
[4] 冯玉瑜、常庚哲，工程数学学报，3(1985)，137—141.
[5] 常庚哲、冯玉瑜，科学通报，3(1986)，157—160.

* 1991年9月23日收到.