关于《矩阵正定性的进一步推广》一文的注记*

黎 奇 升
(湖南吉首大学数学系,吉首 416000)

文[1]给出了下面定义并讨论了它们的一些性质.

定义 设 $A\in R^{n\times n}$,若对任何 $0\neq X\in R^{n\times 1}$,都有正定矩阵 $S=S_X$,使 $X^TS_XAX>0$,则称 A 为广义正定矩阵.这种广义正定矩阵的集合记为 $P_{\bar{S}^+}$,特别 $S=S_X$ 与 X 无关时,这样的广义正定矩阵的集合记为 P_{S^+}.

本文的主要结果是:

1. 说明文[1]中有两个结果不成立.它们是:

"$A\in P_{S^+}$ 当且仅当对 A 的任何主子式 A_1,有 S 的主子式 S_1,使 $A_1\in P_{S_1^+}$".

"如果 $A\in P_{S^+}$,则 A 的所有主子式全为正".

2. 推广文[1]中的一个定理

为此需要下面的

引理[2] 设 $A\in R^{n\times n}$,则下面各陈述是彼此等价的:

1. A 的一切主子式全为正.
2. A 的一切主子矩阵之实特征值都为正.
3. 对每一个 $0\neq X\in R^{n\times 1}$,都有正对角阵 $D_X>0$,使 $X^TD_XAX>0$.

一. $A\in P_{S^+}$ 未必 A 的一切主子式都为正

例如设 $A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -3 & -1\end{pmatrix}\oplus I_{n-2}(n\geqslant 2)$.取 $S=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix}\oplus I_{n-2}$,显然 S 为正定矩阵,

$$SA=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -3 & 6\end{pmatrix}\oplus I_{n-2},$$

且对任何 $0\neq X\in R^{n\times 1}$,有

$$X^TSAX=(x_1+x_2)^2+5x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2>0.$$

故 $A\in P_{S^+}$,但是 A 的主子式 $\left|A\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}\right|=-1<0$.并且对 $A\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}=A_1$,不存在 S 的主子矩阵 S_1,使 $S_1A_1\in P_{S_1^+}$.

二. [1]中定理的推广

文[1]用繁琐的方法证明了:若 $A\in P_{S^+}$,则 $\det A>0$.下面简洁地证明了比上述结论更强的结果,即有:

定理 设 $A\in R^{n\times n}$

* 1992年4月30日收到.94年3月12日收到修改稿.

(1) 若 $A\in P_{S^+}$，则 A 的每一实特征值为正；

(2) 若 $A\in P_{S^+}$，则 A 的一切特征值的实部都为正.

证明 (1) 设 λ 为 A 的任意实特征值，$0\neq \alpha\in R^{n\times 1}$ 且 $A\alpha=\lambda\alpha$. 因为 $A\in P_{S^+}$，存在正定矩阵 S_α，使 $\alpha^{\perp}S_\alpha A\alpha>0$. 又因为 $\alpha^{\perp}S_\alpha A\alpha=\lambda\alpha^{\perp}S_\alpha\alpha$ 且 $\alpha^{\perp}S_\alpha\alpha>0$，所以 $\lambda>0$.

(2) 设 $\lambda=a+bi$ 为 A 的特征值，其中 a,b 均为实数. 若 $b=0$，据(1)知 $\lambda>0$，若 $b\neq 0$，设 $X=\alpha+i\beta$ 为 A 的属于 λ 的特征向量. 其中 $\lambda,\beta\in R^{n\times 1}$，则 $AX=\lambda X$. 于是

$$A\alpha = a\alpha - b\beta, \tag{1}$$

$$A\beta = a\beta + b\alpha. \tag{2}$$

因为 $A\in A\in P_{S^+}$，存在正定矩阵 S，使对任何 $0\neq X\in R^{n\times 1}$，有 $X^{\perp}SAX>0$.

(1)式与(2)式分别左乘 $\alpha^{\perp}S$，$\beta^{\perp}S$ 并且相加得：$\alpha^{\perp}SA\alpha+\beta^{\perp}SA\beta=a(\alpha^{\perp}S\alpha+\beta^{\perp}S\beta)$. 因为 α,β 不全为零，故有 $\alpha^{\perp}S\alpha+\beta^{\perp}S\beta>0$，$\alpha^{\perp}SA\alpha+\beta^{\perp}SA\beta>0$. 从而 $a>0$.

推论 1 设 $A\in R^{n\times n}$，若 $A\in P_{S^+}$，则 $\det A>0$.

证明 因为 A 为实矩阵，其非实特征值成对出现. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 为 A 的实特征值，$a_j\pm b_ji$，$j=1,2,\cdots,t$ 为 A 的非实特征值. 则 $\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r\prod_{j=1}^{t}(a_j^2+b_j^2)$. 据定理(1)，$\det A>0$.

如果记 $S=\{A\in R^{n\times n}\mid\forall\ \lambda\in\sigma(A),\lambda$ 的实部小于 $0\}-S=\{A\mid -A\in S\}$. 此处 $\sigma(A)$ 是 A 的特征值的集则有：

推论 2 $P_D\subset -S$，此处 D 为正对角阵.

证明 据定理中的(2)，$P_D\subseteq -S$. 令 $A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\oplus I_{n-2}(n\geqslant 2)$，则 $\sigma(A)=\{\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i,1,1,\cdots,1\}$. $A\in -S$，但 A 的主子式 $A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=-1$，$A\notin P_D$(引理).

参 考 文 献

[1] 夏长富，矩阵正定性的进一步推广，数学研究与评论，8:4(1988)，499—504.

[2] M. Fiedler and V. Pták, *On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors*, Czech. Math. J., 12(1962), 382—400.