第15卷第1期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 1
1995年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1995

非光滑 Lipschitz 规划的 Mond-Weir 对偶*

李宏伟 游兆永
(西安交通大学应用数学中心，西安 710049)

摘 要 本文建立了非光滑 Lipschitz 规划的两种 Mond-Weir 对偶形式，在引入一定的非光滑广义凸性下证明了相应的对偶定理.

关键词 Lipschitz 规划，对偶性.
分类号 AMS(1991) 90C/CCL O221.2

一 引 言

众所周知，对偶性研究在数学规划的理论与算法构造中具重要地位. 对光滑规划的 Mond-Weir 型对偶而言，由于其目标函数与原规划目标函数相同而引起众多研究，如 Bector[1-2] 在对光滑函数施加一定广义凸性下证明了若干对偶定理.

本文考虑非光滑 Lipschitz 规划(P)与所建立的 Mond-Weir 对偶形式(D_1)，(D_2).

(P) $\quad \min \ f(x)$

$$\text{s.t.}\quad g_i(x)\leqslant 0,\ i=1,\cdots,l;\ h_j(x)=0,\ j=1,\cdots,m,$$

f, g_i, h_j 均为 R^n 上的局部 Lipschitz 函数.

(D_1) $\quad \max \ f(u)$

$$\text{s.t.}\quad 0\in\partial\Big(f+\sum_{i=1}^{l}y_ig_i+\sum_{j=1}^{m}z_jh_j\Big)(u),$$

$$\sum_{i=1}^{l}y_ig_i(u)+\sum_{j=1}^{m}z_jh_j(u)\geqslant 0,$$

$$Y=(y_1,\cdots,y_l)^t\geqslant 0,\ Z=(z_1,\cdots,z_m)^t,\ u\in R^n.$$

(D_2) $\quad \max \ f(u)$

$$\text{s.t.}\quad 0\in\partial f(u)+\sum_{i=1}^{l}y_i\partial g_i(u)+\sum_{j=1}^{m}z_j\partial h_j(u),$$

$$y_ig_i(u)\geqslant 0,\ i=1,\cdots,l,\ z_jh_j(u)=0,\ j=1,\cdots,m,$$

$$Y=(y_1,\cdots,y_l)^t\geqslant 0,\ Z=(z_1,\cdots,z_m)^t,\ u\in R^n.$$

我们只讨论对偶(D_1). 记(P)与(D_1)的可行解集合分别为 S，SD_1；最优解集合分别为 S^*，SD_1^*. 引入下面的非光滑广义凸性与引理(该引理用于定理2证明).

定义1 设 $X\subset R^n$，$f:R^n\to R$ 在 $\bar{x}$ 为局部 Lipschitz 函数，称 f 在 $\bar{x}$ 关于 X 为

* 1992年3月29日收到.

(1) 广义伪凸函数[5]，若 $x\in X, f(x)<f(\bar{x})\Rightarrow(x-\bar{x})^t\cdot\xi<0, \forall\,\xi\in\partial f(\bar{x})$；

(2) 广义严格伪凸函数，若 $x\in X, x\neq\bar{x}, f(x)\leqslant f(\bar{x})\Rightarrow(x-\bar{x})^t\cdot\xi<0, \forall\,\xi\in\partial f(\bar{x})$；

(3) 广义拟凸函数，若 $x\in X, f(x)\leqslant f(\bar{x})\Rightarrow(x-\bar{x})^t\cdot\xi\leqslant 0, \forall\,\xi\in\partial f(\bar{x})$；

(4) 广义弱拟凸函数，若 $x\in X, f(x)<f(\bar{x})\Rightarrow(x-\bar{x})^t\cdot\xi\leqslant 0, \forall\,\xi\in\partial f(\bar{x})$.

引理 1[3] 设 $x^*\in S$，规划(P)在 x^* 满足一定的约束规范，则 $x^*\in S^*$ 的必要条件为：存在 $y_i^*\geqslant 0(i=1,\cdots,l), z_j^*(j=1,\cdots,m)$ 使

$$0\in\partial\Big(f+\sum_{i=1}^{l}y_i^*g_i+\sum_{j=1}^{m}z_j^*h_j\Big)(x^*), g_i^*g_i(x^*)=0, z_j^*h_j(x^*)=0.$$

二 对偶定理

定理 1(弱对偶) 若对所有 $(u,Y,Z)\in SD_1$，下面条件之一成立，则 $\inf(\mathrm{P})\geqslant\sup(\mathrm{D}_1)$.

(1) $A=f+\sum\limits_{i=1}^{l}y_ig_i+\sum\limits_{j=1}^{m}z_jh_j$ 在 u 关于 S 是广义伪凸函数；

(2) f 在 u 关于 S 广义伪凸，$B=\sum\limits_{i=1}^{l}y_ig_i+\sum\limits_{j=1}^{m}z_jh_j$ 在 u 关于 S 广义拟凸；

(3) f 在 u 关于 S 广义弱拟凸，$B=\sum\limits_{i=1}^{l}y_ig_i+\sum\limits_{j=1}^{m}z_jh_j$ 在 u 关于 S 广义严格伪凸.

证明 (2). 对任意 $x\in S,(u,Y,Z)\in SD_1, x\neq u$，易见 $B(x)\leqslant B(u)$. 因 B 在 u 关于 S 广义拟凸，于是

$$(x-u)^t\cdot\xi_B\leqslant 0,\quad\forall\,\xi_B\in\partial B(u).\tag{1}$$

又由广义梯度性质 $0\in\partial(f+B)(u)\subseteq\partial f(u)+\partial B(u)$，从而存在 $\bar{\xi}\in\partial f(u), \bar{\xi}_B\in\partial B(u)$ 使 $0=\bar{\xi}+\bar{\xi}_B$，再由(1)式得 $(x-u)^t\bar{\xi}\geqslant 0$. 而 f 在 u 关于 S 广义伪凸，则必有 $f(x)\geqslant f(u), x\neq u$. 于是对所有 $x\in S,(u,Y,Z)\in SD_1$ 有 $f(x)\geqslant f(u)$，故 $\inf(\mathrm{P})\geqslant\sup(\mathrm{D}_1)$.

定理 2(强对偶) 设 $x^*\in S^*$，规划(P)在 x^* 满足一定的约束规范(从而引理 1 成立)，则存在 (Y^*,Z^*) 使 $(u^*,Y^*,Z^*)\in SD_1$. 进一步，若定理 1 条件之一成立，则 $x^*,(x^*,Y^*,Z^*)$ 分别为(P)与(D_1)的整体最优解.

定理 3(严格逆对偶) 设 $x^*\in S^*,(u^*,Y^*,Z^*)\in SD_1^*$ 且规划(P)在 x^* 满足一定约束规范. 若对所有 $(u,Y,Z)\in SD_1$，下面条件之一成立，则 $u^*=x^*$，即 u^* 也是原规划(P)的解.

(1) $A=f+\sum\limits_{i=1}^{l}y_ig_i+\sum\limits_{j=1}^{m}z_jh_j$ 在 u 关于 S 广义严格伪凸；

(2) f 在 u 关于 S 广义拟凸，$B=\sum\limits_{i=1}^{l}y_ig_i+\sum\limits_{j=1}^{m}z_jh_j$ 在 u 关于 S 广义严格伪凸；

(3) f 在 u 关于 S 广义严格伪凸，$B=\sum\limits_{i=1}^{l}y_ig_i+\sum\limits_{j=1}^{m}z_jh_j$ 在 u 关于 S 广义拟凸.

证明 (3). 首先此条件下有定理 2 自然成立，容易推知 $f(x^*)=f(u^*)$. 下用反证法证明 $u^*=x^*$. 易见 $B(x^*)\leqslant B(u^*)$，类似定理 1(2)的证明知道存在 $\xi^*\in\partial f(u^*)$ 使 $(x^*-u^*)^t\cdot\xi^*\geqslant 0$，注意到 f 在 u^* 的广义严格伪凸性，于是有 $f(x^*)>f(u^*)$，此与 $f(u^*)=f(x^*)$ 矛盾. 故有 $u^*=x^*$.

参 考 文 献

[1] C. R. Bector, JOTA, 52(3),(1987), 509—515.
[2] C. R. Bector, JOTA, 59(2),(1988), 209—211.
[3] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, 1983.
[4] R. Flether, 实用最优化方法，游兆永、徐成贤等译，天津科技翻译出版社，1990.
[5] 唐焕文等，数学学报，33(4),(1990), 521—529.

Mond-Weir Duality for Nonsmooth Lipschitz Programming

Li Hongwei *You Zhaoyong*
(Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710079)

Abstract

Two Mond-Weir dual forms for nonsmooth Lipschitz programming are established and their dual theorems are proved under some nonsmooth generalized convexity.

Keywords Lipschitz programming, duality.