关于加法范畴上的两个猜测*

高振林　　任　毅
（芜湖教育学院数学系，安徽241000）

摘　要　本文继文[1]在加法范畴上引进左Zorn条件、K-商范畴等概念，讨论范畴上的Kothe猜测与Herstein猜测，得到两个猜测成立的充要条件，并同时得到环论上的一个新结果和两个猜测成立的条件. 这个条件改进了文[3]中的条件.

关键词　加权范畴，左Zorn条件，Kothe猜测，Herstein猜测，K-商理想.
分类号　AMS(1991) 18E05/CCL O154

本文中范畴均指加法范畴，完全采用[1]中符号，不加定义的概念均引自[1]，[2].

设 $A=\bigcup_{\alpha,\beta\in\Sigma}{}_\alpha A_\beta$ 为范畴，称${}_\alpha A_\alpha$，$\forall\ \alpha\in\Sigma$ 中的换位元为 A 的换位元；若 A 的所有换位元皆幂零，称 A 为 Her-范畴. 同样定义 Her-(左、右)理想等.

设 $x\in A$，称${}^\perp x=\{a\in A\,|\,ax=0$，只要有意义$\}$为 x 的特殊左零子，易知${}^\perp x$ 为 A 的左理想. 设 M 是范畴 A 的子集，称 A 在 M 上满足左上界条件，若对任意特殊左零化子有序集（关于包含关系）$\{{}^\perp x_i\,|\,i\in I, x_i\in M\}$均有 $x\in M$，使得${}^\perp x$ 为其上界；称 A 在 M 上满足左 Zorn 条件（幂零元左 Zorn 条件），若 $S=\{x\in M\,|\,{}^\perp x$ 关于 M 为极大[3]$\}\neq\varnothing$（且 S 中元均为 A 的幂零元）. 当 $M=\varnothing$ 时，规定 A 在 M 上自然满足这个条件.

以上概念均可类似地在环上定义. 结合[3]得

命题1　设 M 为环 A 的子集，则

1)　A 在 M 上满足 A-左模同态链归纳条件[3]，当且仅当 A 在 M 上满足左上界条件；

2)　A 在 M 上满足左上界条件，则 A 在 M 上必满足 Zorn 条件，但反之不必.

仿照环论中那样，我们可提出范畴上的所谓 Kothe 猜测和 Herstein 猜测.

设 B 为范畴 $A=\bigcup_\alpha A_\beta$ 的幂零元左理想，由[1]命题1.1，B 可表为 $B=\bigcup_{\beta\neq v}{}_\beta B_v\bigcup_\alpha{}_\alpha B_\alpha$，${}_\alpha B_\alpha$，$\forall\ \alpha\in\Sigma$ 为环${}_\alpha A_\alpha$ 的幂零元左理想. 令

$$I({}_\alpha B_\alpha)={}_\alpha B_\alpha+\sum_{\lambda\neq\alpha}{}_\alpha B_{\lambda\lambda}A_\alpha+K({}_\alpha A_\alpha),\ \forall\ \alpha\in\Sigma,$$

$$I(B)=\bigcup_\alpha I({}_\alpha B_\alpha)\bigcup_{\beta\neq v}({}_\beta B_v+\sum_\lambda{}_\beta B_{\lambda\lambda}A_v+{}_\beta K_v).$$

易知 $I(B)$ 为 A 的包含 $K(A)$ 的理想，且 $\bar I(B)=I(B)/K(A)\stackrel{\triangle}{=}\bigcup_\alpha\bar I({}_\alpha B_\alpha)\bigcup_{\beta\neq v}\bar I({}_\beta B_v)$ 为商范畴 $\bar A=A/K(A)$ 的理想，称之为 A 的 K-商理想. 在环上也可类似地定义. 以下给出主要结果.

* 1991年11月11日收到. 94年3月24日收到修改稿.

定理 1　设 B 为范畴 A 的真理想，I 为 A 的包含 B 的理想，若 $\bar{A}=A/B$ 在某个 $\overline{M}_\alpha={}_\alpha\bar{I}_\alpha-\{\bar{0}\}$ 上满足幂零元左 Zorn 条件，则 $\bar{A}$ 必有非零的幂零元理想.

证明　取 $\bar{a}\in S=\{\bar{x}\in\overline{M}_\alpha \mid {}^{\perp}\bar{x}$ 关于 $\overline{M}_\alpha$ 为极大$\}$，$\bar{a}$ 幂零，往证 $\bar{a}_\alpha\bar{A}_\alpha\bar{a}=\bar{0}$. 取 $\bar{r}\in{}_\alpha\bar{A}_\alpha$，若 $\bar{a}\bar{r}=\bar{0}$ 则 $\bar{a}\bar{r}\bar{a}=\bar{0}$，不然因 $\bar{a}\in S$，$\bar{a}\bar{r}\in\overline{M}_\alpha$，$\bar{A}\neq{}^{\perp}\bar{a}\bar{r}$，故 ${}^{\perp}\bar{a}={}^{\perp}\bar{a}\bar{r}$，即 $\bar{a}\bar{r}\in S$，$\bar{r}\bar{a}$ 幂零，设其幂零指数为 n，若 $\bar{a}\bar{r}\bar{a}\neq\bar{0}$，同样能证得 $\bar{a}\bar{r}\bar{a}\in S$，${}^{\perp}\bar{a}={}^{\perp}(\bar{a}\bar{r}\bar{a})$，且映射 $\varphi_\alpha:\bar{x}\bar{a}\to\bar{x}(\bar{a}\bar{r}\bar{a})$ 为 ${}_\alpha\bar{A}_\alpha\bar{a}$ 到 ${}_\alpha\bar{A}_A(\bar{a}\bar{r}\bar{a})$ 的 ${}_\alpha\bar{A}_A$-模同构. 令 $\bar{x}'=\bar{r}(\bar{a}\bar{r})^{n-2}$，则 $\bar{x}'(\bar{a}\bar{r}\bar{a})=(\bar{r}\bar{a})^n=\bar{0}$，由同构关系知 $\bar{x}'\bar{a}=\bar{0}$，这与 $\bar{r}\bar{a}$ 幂零指数为 n 矛盾！故 $\bar{a}\bar{r}\bar{a}=\bar{0}$，$[\bar{a}]$ 为 ${}_\alpha\bar{A}_\alpha$ 的幂零理想，从而 $[{}_\mu\bar{A}_\alpha\bar{a}_\alpha\bar{A}_\mu]$ 为 ${}_\mu\bar{A}_\mu$ 的幂零元理想. 证毕.

注意到定理 1 的证明，即可进一步得环上新结果.

定理 1′　设 B 为环 A 的真理想，I 为 A 的包含 B 的理想，若 $\bar{A}=A/B$ 在 $\overline{M}=\bar{I}-\{\bar{0}\}$ 上满足幂零元左 Zorn 条件，则 $\bar{A}$ 含非零幂零理想. 从而 $\bar{A}=A/K(A)$ 在 $\overline{M}=\bar{A}-\{\bar{0}\}$ 上满足幂零元左 Zorn 条件，当且仅当 A 是幂零元环.

定理 2　设 A 为范畴，则 $K(A)$ 包含 A 的任意幂零元单侧理想，当且仅当 A 的任意 K-商理想在每个 $\overline{M}_\alpha=\bar{I}({}_\alpha B_\alpha)-\{\bar{0}\}$ 上满足左 Zorn 条件.

证明　只需证充分性，并先 $K(A)$ 包含任意幂零元左理想 B，这只要证 $\bar{I}(B)=\bar{0}$. 分两款证.

1)　若有 $\bar{I}({}_\alpha B_\alpha)\neq\bar{0}$. 取 $\bar{x}\in S=\{\bar{x}\in\overline{M}_\alpha \mid {}^{\perp}\bar{x}$ 关于 $\overline{M}_\alpha$ 为极大$\}$，不妨设

$$\bar{x}=\bar{b}_1+\overline{\sum_{i=2}^{n} b_i a_i},\quad b_i\in{}_\alpha B_\lambda,\ a_i\in{}_\lambda A_\alpha,\ b_1\in{}_\alpha B_A.$$

因 $xb_1\in{}_\alpha B_\alpha$，$xb_ia_i=b_i'a_i$，$b_i'=xb_i\in{}_\alpha B_\lambda$，$a_ib_i'\in{}_\lambda B_\lambda$，$i=2,3,\cdots,n$，故 xb_ia_i 幂零. 若有某个 $x\lambda_j\,\overline{\in}\,K({}_\alpha A_\alpha)$，$\lambda_j$ 为 b_1，b_ia_i 中之一，则 $\overline{x\lambda_j}\neq 0$. 设 ${}^{\perp}\overline{x\lambda_j}\neq\bar{I}({}_\alpha B_\alpha)$，因 $\bar{x}\in S$，${}^{\perp}\bar{x}\subseteq{}^{\perp}\overline{x\lambda_j}$，故 ${}^{\perp}\overline{x\lambda_j}={}^{\perp}\bar{x}$. 因对 $\forall\ \bar{a}\in\bar{I}({}_\alpha B_\alpha)$，$ax\lambda_j\overset{\wedge}{=}ay$ 幂零，从而 $\overline{ay}$ 幂零，设其幂零指数为 n. 若 $yay\,\overline{\in}\,K({}_\alpha A_\alpha)$，则 $\overline{yay}\neq\bar{0}$，因 ${}^{\perp}\bar{y}={}^{\perp}\overline{yay}$，$\overline{a(ya)^{n-2}}\in{}^{\perp}\overline{yay}$，故 $\overline{a(ya)^{n-2}}\bar{y}=(\overline{ay})^{n-1}=\bar{0}$，这是矛盾！故 $\overline{yay}=\bar{0}$，$[\bar{y}]$ 为 $\bar{I}({}_\alpha B_\alpha)$ 的幂零理想. 这与 $\bar{I}({}_\alpha B_\alpha)$ K-半单矛盾！故 $\bar{y}=\overline{x\lambda_j}=\bar{0}$，即 $x\lambda_j\in K({}_\alpha A_\alpha)$，因 $\bar{x}$ 表达式得 $\bar{x}^2=\bar{0}$. 即 S 中元皆幂零，由定理 1，$\bar{A}$ 有非空幂零元理想，这与 $\bar{A}K$-半单矛盾！故 $\bar{I}({}_\alpha B_\alpha)=\bar{0}$，$\forall\ \alpha\in\Sigma$.

2)　若有 $\bar{I}({}_\beta B_v)\neq\bar{0}$，$B,\gamma\in\Sigma$，$\beta\neq\gamma$，取 $\bar{0}\neq\bar{x}\in\bar{I}({}_\beta B_v)$，由 ${}_v\bar{A}_\beta\bar{x}\subseteq\bar{I}({}_vB_v)=\bar{0}$，${}_\alpha\bar{A}_\beta\bar{x}_v\bar{A}_\alpha\subseteq\bar{I}({}_\alpha B_\alpha)=\bar{0}$，$\forall\ \alpha\in\Sigma$，$\bar{x}_v\bar{A}_\beta\subseteq\bar{I}({}_\beta B_\beta)=\bar{0}$ 知，$(\bar{x})$ 幂零，这也与 $\bar{A}K$-半单矛盾！故 $\bar{I}({}_\beta\beta_v)=\bar{0}$，$\forall\ \beta\neq v$，综合 1) 与 2) 即得 $\bar{I}(B)=\bar{0}$.

现设 B' 为 A 的任意幂零元右理想，取 $x\in B'$，若 $x\in{}_\beta B'_v$，$B\neq v$，易得 $(x|$ 为 A 的幂零元左理想，而 $(x|\subseteq K(A)$，故 $x\in K(A)$；若 $x\in{}_\alpha B'_\alpha$. 同样可得 $(x|\subseteq K(A)$. 也有 $x\in K(A)$. 证毕.

定理 3　设 A 为 Her-范畴，则 A 的所有幂零元含于 $K(A)$ 之中，当且仅当 A 的任意 K-商理想在每个 $\overline{M}_\alpha=\bar{I}({}_\alpha B_\alpha)-\{\bar{0}\}$ 上满足左 Zorn 条件.

不难在环上给出相应于定理 2，定理 3 的结果，它们改进了[3]中的结果.

参 考 文 献

[1]　高振林，范畴的 K-根与 Jacobson 结构定理，数学年刊，92.3 期.

[2]　刘绍学，加法范畴的 Weddorbarn-Arbin 定理，科学通报，88.3 期.

[3]　许家华，关于 Kothe 问题及幂零性问题，中国科学(A 辑)，83.3 期.