第15卷第1期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 1
1995年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1995

一类八阶椭圆方程边值问题的唯一性*

史 天 勤
(长春大学，130022)

摘 要 对一类椭圆方程的边值问题得到了一定条件下的唯一性定理.

关键词 椭圆方程，边值问题，唯一性.
分类号 AMS(1991) 35J40/CCL O175.25

Golyal[1][2] 对四阶和六阶常系数椭圆方程的边值问题讨论了解的唯一性. 本文沿用他的记号，对八阶常系数椭圆方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta^4 u - a\Delta^3 u + b\Delta^2 u - c\Delta u + du = f(x),\ x \in D \subset E_n, & (1) \\ u|_{\partial D} = f_1(x),\ \Delta u|_{\partial D} = f_2(x),\ \Delta^2 u|_{\partial D} = f_3(x),\ \Delta^3 u|_{\partial D} = f_4(x). & (2) \end{cases}$$

在系数满足一定条件下证明了解的唯一性.

引理 1 若 u 是方程

$$\Delta^4 u - a\Delta^3 u + b\Delta^2 u - c\Delta u + du = 0 \tag{3}$$

的解，则当

$$a > 0,\ d > 0,\ ab > c,\ a(bc - ad) > c^2 \tag{4}$$

时，若令

$$a(x) = (a\Delta^3 u + c\Delta u)^2 + a(ab - c)\left(\Delta^2 u + \frac{ad}{ab - c}u\right)^2$$
$$+ [a(bc - ad) - c^2](\Delta u)^2 + \frac{ad}{ab - c}[a(bc - ad) - c^2]u^2,$$

便有 $\Delta a(x) \geqslant 0$.

引理 2 若 u 是方程(3)的解，方程的系数除满足条件(4)，还满足

$$3ac > 8d, \tag{5}$$

则对函数

$$\beta(x) = \frac{(\Delta^3 u)^2 + (\Delta^3 u - a\Delta^2 u)^2 + (\Delta^3 u - a\Delta^2 u + b\Delta u)^2 + (\Delta^3 u - a\Delta^2 u + b\Delta u - cu)^2}{2}$$
$$+ bdu^2 + ac(\Delta u)^2 + b(\Delta^2 u)^2 + 4du\Delta^2 u - adu\Delta u - c\Delta u\Delta^2 u - 2d(\Delta u)^2,$$

有 $\Delta\{a\beta(x)\} \geqslant a(x)$.

证明 经计算得

* 1992年5月5日收到. 94年4月2日收到修改稿.

$$\Delta\{a\beta(x)\} - \alpha(x) \geqslant a[2bd(u_{,i})^2 + (2ac-4d)(\Delta u_{,i})^2 + 2b(\Delta^2 u_{,i})^2 - 2adu_{,i}\Delta u_{,i} + 8du_{,i}\Delta^2 u_{,i} - 2c\Delta u_{,i}\Delta^2 u_{,i}]$$

在方程(3)的系数满足条件(4)和(5)时,上式右端方括号内的二次型矩阵的所有顺序主子式均大于零.从而是正定的,故 $\Delta\{a\beta(x)\}\geqslant\alpha(x)$.

由引理1,我们有 $0\leqslant\alpha(y)\leqslant\frac{1}{|D|}\int_D\alpha(x)dx=\frac{a}{|D|}\int_D\Delta\beta(x)dx=\frac{a}{|D|}\int_{\partial D}\frac{\partial}{\partial r}\beta(x)dx$, 其中 D 是 E_n 中的 Green 域,∂D 是 D 的边界,$|D|$ 是 D 的体积,$\partial/\partial r$ 是外法向导数符号,$y\in D$.

设 D 是以 y 为心 r 为半径的球 B_r,其表面积为 s_r,体积为 v_r. 则 $s_r=r^{n-1}s_1$, $v_r=(\frac{r^n}{n})s_1$,所以

$$r\alpha(y)<\frac{an}{s_1}\frac{\partial}{\partial r}\int_{\partial B_1}\beta(x)ds_1,$$

$$\frac{R^2}{2}\alpha(y)\leqslant\int_0^R(\frac{an}{s_1}\frac{\partial}{\partial r}\int_{\partial B_1}\beta(x)ds_1)dr=\frac{na}{s_1}\int_{\partial B_1}\beta(R)ds_1-\frac{na\beta(0)}{s_1},$$

其中 $\int_{\partial B_1}\beta(R)ds_1$ 表示 $\int_{\partial B_1}\beta(x)ds_1$ 在 $r=R$ 时的值.

若 u 是 E_n 中的有界解(即 $u,\Delta u,\Delta^2 u$ 和 $\Delta^3 u$ 有界),则在 $\alpha(y)\leqslant\frac{2na}{R^2 s_1}\int_{\partial B_1}\beta(R)ds_1-\frac{2na\beta(0)}{R^2 s_1}$ 中,令 $R\to+\infty$,得到 $\alpha(y)=0, y\in E_n$. 由 $\alpha(x)$ 的表达式知,$u\equiv0$. 于是得到

定理1 若 u 是方程(3)的 E_n 中的有界解,方程的系数满足条件(4)和(5),则 $u\equiv0$.

现在设 u_1 和 u_2 是问题(1)和(2)的两个解,则 $w=u_1-u_2$ 满足(3),且

$$w|_{\partial D}=\Delta w|_{\partial D}=\Delta^2 w|_{\partial D}=\Delta^3 w|_{\partial D}=0.$$

此时,在定理1的条件下,函数

$$G=(a\Delta^3 w+c\Delta w)^2+a(ab-c)(\Delta^2 w+\frac{adw}{ab-c})^2+[a(bc-ad)-c^2](\Delta w)^2 + \frac{ad}{ab-c}[a(bc-ad)-c^2]w^2$$

在边界 ∂D 上达到最大值,从而 $w\equiv0, x\in D$,于是有

定理2 边值问题(1)和(2)在系数满足条件(4)和(5)时,在 $C^8(D)\cap C^6(\bar{D})$ 中至多有一个解.

参 考 文 献

[1] V. V. Goyal, *Liouville-type results for fourth-order elliptic equations*, Proc. Roy. Soc. edinburgh sect A, 102 (1986), 1—5.

[2] S. Goyal and V. B. Goyal, *Liouville-type and uniqueness results for a class of sixth-order elliptic equation*, J. Math. Appl., 139(1989), 586—599.