关于最近点对及近渡点存在性与唯一性*

潘 文 熙
(暨南大学数学系，广州510632)

摘　要　给定两个不交集合 F,G 研究最近点对 (x,y) 存在性及与近距映射 P_Gx_0,P_Fy_0 的关系，以及与近渡点存在的关系. 又引入严凸集，它对研究最近点对唯一性与近渡点唯一性起重要作用，而 F,G 一个严凸，一个凸的仍不保证唯一性，除非在严凸空间情形.

关键词　最近点对，近渡点，严凸集.
分类号　AMS(1991) 41A65/CCL O174.41

§1　引　言

度量空间中给定两个不交的集合 F,G 来研究两集的最近距离 $\rho(F,G)=\inf\limits_{x\in F,y\in G}\rho(x,y)$. 当存在元素 $x_0\in F,y_0\in G$ 到达此最近距离 $\rho(x_0,y_0)=\rho(F,G)$，便称 (x_0,y_0) 为最近点对(proximity pair). 本文前段研究最近点对存在的种种条件，也涉及与度量投影(近距映射) P_F,P_G 的关系. 易指出即使欧氏空间，设 F,G 是闭凸集并不保证最近点对的存在性. 在文章后段，我们研究近渡点，即 $x_0\in F$，使 $\rho(x_0,G)=\rho(F,G)$. 它比起最近点对意义是稍弱的. 研究了近渡点的存在性及它们的唯一性. 指出严凸性起重要的作用. 也指出即使欧氏空间，如果知 F,G 是紧凸集，也并不足以保证最近点对或近渡点的唯一性. 尽管这时 F,G 都是 Chebyshev 集，即 P_F,P_G 都定义在全空间上存在且单值. 因为比如 $\mathbf{R}^2$ 中两个相离闭正方形并且有对应边平行时便能说明. 为此而需引入严凸集. 讨论了它的定义的等价条件，并建立了唯一性定理. 最后指出相互近渡点存在且唯一仍不见得最近点对存在，可看出它们的显著差异.

§2　最近点对的存在性

考虑距离 $\rho(F,G)$ 何时存在 $x_0\in F,y_0\in G$ 使 $\rho(F,G)=\rho(x_0,y_0)$? 先看一种平凡情况 $\rho(F,G)=0$. 当然合要求的 x_0,y_0 只能 $x_0=y_0$，即当且仅当 $F\cap G\neq\varnothing$ 时最近点对存在. 但简单推理知 $\rho(F,G)=0$ 等价于 $F\cap\overline{G}\neq\varnothing$ 或 $\overline{F}\cap G\neq\varnothing$. 故此合后者，而 $F\cap G=\varnothing$ 时都使得最近点对不存在. 一般情形先建立

基本引理　$\rho(F,G)=\inf\limits_{x\in F}\rho(x,G)=\inf\limits_{y\in G}\rho(y,F)$，若最近点对 (x_0,y_0) 存在则 $\rho(F,G)=\rho(x_0,G)=\rho(y_0,F)=\rho(x_0,y_0)$.

* 1991年10月31日收到. 1994年4月7日收到修改稿.

证明 以下简记 $\rho=\rho(F,G)$. 由定义 $\forall x\in F,\forall y\in G$ 有 $\rho(x,y)\geqslant\rho(y,F)\geqslant\inf\limits_{y\in G}\rho(y,F)$. 左方取 $\inf\limits_{x\in F,y\in G}$, $\rho\geqslant\inf\limits_{y\in G}\rho(y,F)$. 另一方面 $\forall\varepsilon>0,\forall y\in G,\exists x_\varepsilon\in F$ 使 $\rho(x_\varepsilon,y)<\rho(y,F)+\varepsilon,\rho\leqslant\rho(y,F)+\varepsilon$. ε 任意小, 故此 $\rho=\inf\limits_{y\in G}\rho(y,F)$. 另一等式同理获得.

当假设最近点对 (x_0,y_0) 存在时 $\forall y\in G,\rho\leqslant\rho(x_0,y)$, 取 $\inf\limits_{y\in G}$ 有 $\rho\leqslant\rho(x_0,G)$. 另一方面 $\rho(x_0,G)\leqslant\rho(x_0,y_0)=\rho$ 于是 $\rho=\rho(x_0,G)$.

我们用 P_Gx 表示 x 到 G 的佳逼元(最近 x 的 G 中元)全体 $P_Gx=\{g\in G:\ \rho(x,g)\leqslant\rho(x,g'),\forall g'\in G\}$.

定理 2.1 设 F,G 有最近点对 x_0,y_0 则(1). $y_0\in P_Gx_0$, $x_0\in P_Fy_0$. (2). $x_0\in P_FP_Gx_0$. (3). 更设 P_F,P_G 单值, 则 $y_0=P_Gx_0,x_0=P_Fy_0$. 因而 $x_0=P_FP_Gx_0$.

证明 (1)假若 $y_0\notin P_Gx_0$ 则存在 $y_1\in G,y_1\neq y_0$ 使 $\rho(x_0,y_0)>\rho(x_0,y_1)$. 但 $\rho(x_0,y_1)\geqslant\rho(F,G)$, 这导致 $\rho(x_0,y_0)>\rho(F,G)$ 矛盾. (2)由(1)立刻推得. (3)由(1)、(2)立刻推得.

反面问题若 F,G 都是 Chebyshev 集, $x_0=P_FP_Gx_0$, 是否一定 x_0,y_0 是最近点对呢? 对此[CG]证明了在 Hilbert 空间中若 F,G 都是闭凸集的情形回答是肯定的. 今可指出此命题若不设 F,G 凸性是不成立的. 例如 $\mathbf{R}^1$ 中 $F=\{1,5\}$, $G=\{\xi:\ 2\leqslant\xi\leqslant4\}$. 这时 $P_G0=2,P_F2=0$. 但 0,2 作最近点对, 又如 $\mathbf{R}^2$ 中 $F=\{(0,1),(-2,-2)\},G=\{(\xi,0):\ -2\leqslant\xi\leqslant2\}$. 则 $P_FP_G(-2,2)=P_F(-2,0)=(-2,-2)$. 但 $(-2,-2)$, $(-2,0)$ 不是最近点对. 而最近点对应是 $x_0=(0,1),y_0=(0,0)$.

论到最近点对的存在性问题, 猜想在 Hilbert 空间或欧氏空间是否 F,G 是闭凸集就能保证最近点对存在呢? 事实上猜想是错误的. 例如 $\mathbf{R}^2$ 中命 $F=\{(\xi,\eta):\ \xi\geqslant0,\eta\leqslant0\},G=\{(\xi,\eta):\ \xi>0,\eta\geqslant\frac{1}{\xi}\}$ 则 F,G 都是闭凸集, 但不存在最近点对甚至不存在近渡点. 因为这时 $\rho(F,G)=0$, 而 F,G 不交.

下面讨论存在性条件. 称 G 关于 F 是可近的(proximinal), 乃凡 $x\in F$, 相应存在 $g\in G$ 使 $\rho(x,g)=\rho(x,G)$. [Xu]给出了

定理 A 赋范空间中 F 弱紧, G 是凸集且关于 F 可近, 则 F,G 的最近点对 x_0,y_0 存在.

定理 2.2 自反 Banach 空间中 F,G 弱闭, 其中一个有界, 则近点对存在(特别当 F,G 皆闭凸, 一个有界).

证明 设 F 有界. 因为在自反空间中有界弱闭集则弱紧(见作者著线性空间分析第四章, 暨大版). 今存在极小化列 $x_n\in F,y_n\in G$ 使 $\rho(x_n,y_0)\to\rho$. 由弱紧性就有子列 $x_{n_i}\xrightarrow{W}x_0$. 由于 F 弱闭 $x_0\in F$. 相应 $\{y_{n_i}\}$ 亦有界. 又存在子列(仍记指标 n_i)使 $y_{n_i}\xrightarrow{W}y_0\in G$ (由于 G 弱闭)今 $x_{n_i}-y_{n_i}\xrightarrow{W}x_0-y_0$, $\|x_0-y_0\|\leqslant\varliminf\limits_{i}\|x_{n_i}-y_{n_i}\|=\rho$, 又 $\|x_0-y_0\|\geqslant\rho$, 因此 $\|x_0-y_0\|=\rho$.

[Pai]曾证当空间为一致凸, F,G 皆闭凸且 F 紧的情形下最近点对存在. 这显然被定理 2.2 所包含了.

定理 2.3 度量空间中以下任一项条件导致 F,G 的最近点对存在. (Ⅰ) F 紧, G 关于 F 可近. (Ⅱ) F 是囿紧闭集, G 有界且 G 关于 F 可近. ("囿紧"即任一闭球交此集得紧集).

证明 (Ⅰ)首先由基本引理 $\rho(F,G)=\inf\limits_{x\in F}\rho(x,G)$. 今有极小化列 $\{x_n\}\subset F,\rho(x_n,G)\to\inf\limits_{x\in F}\rho(x,G)$. 因为 F 紧, 存在子列 $x_{n_i}\to x_0\in F$, 有 $\rho(x_{n_i},G)\to\rho(x_0,G)$. 对 x_0 因 G 关于 F 可近性, 乃

存在 $y_0\in G$ 使 $\rho(x_0,G)=\rho(x_0,y_0)$. 合并 $\rho(x_0,y_0)=\rho(x_0,G)=\inf_{x\in F}\rho(x,G)=\rho(F,G)$. (Ⅱ)首先有 $x_n\in F,y_n\in G$ 使 $\rho(x_n,y_n)\to\rho(F,G)(=\rho)$. G 有界故此$\{y_n\}$有界. 因此式$\{x_n\}$有界,而 F 囿紧且闭,故存在 $x_{n_i}\to x_0\in F$. 相应 y_{n_i} 有 $\rho(x_0,y_{n_i})\leqslant\rho(x_0,x_{n_i})+\rho(x_{n_i},y_{n_i})\to\rho$. 又 $\rho(x_0,y_{n_i})\geqslant\rho$ 于是 $\rho(x_0,y_{n_i})\to\rho$. 另外,G 关于 F 可近故对 x_0 存在 $y_0\in G$ 使 $\rho(x_0,y_0)=\rho(x_0,G)$于是 $\rho\leqslant\rho(x_0,y_0)=\rho(x_0,G)\leqslant\rho(x_0,y_{n_i})\to\rho,\rho(x_0,y_0)=\rho$ 证完.

[S]曾建立命题: 严格凸空间中 F 闭凸局部紧,G 紧凸,则最近点对存在. 还有[Pai]一命题见上述. 这两命题实际已被定理 2.3(Ⅱ)包含. 定理 2.3 条件作某些减弱即不成立. 例如 Hilbert 空间中可作成 F,G 一个紧一个有界闭(但不是凸),仍然不保证最近点对存在. 取 $L_2[0,2\pi]$空间中 $G=\{0\}$单点,$F=\{x_n\}$,这里 $x_n=x_n(t)=(1+1/n)^{1/2}\sin nt$, 则对 $n\neq m$

$$\|x_n-x_m\|^2=\int_0^{2\pi}(1+\frac{1}{n})\sin^2 nt\,dt+\int_0^{2\pi}(1+\frac{1}{m})\sin^2 mt\,dt=(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{m})\pi>2\pi.$$

故此 F 无聚点,F 乃闭有界. 又 $\|0-x_n\|=\sqrt{(2+1/n)\pi}\to\sqrt{2\pi}$且恒大于$\sqrt{2\pi}$,所以 $\rho(F,G)=\sqrt{2\pi}$. 但没有点对到达此值.

附带提及最近点对存在与 P_G,P_G 又一些关系. 前面说过 Hilbert 空间中的两个闭凸集情形 P_FP_G 的不动点 x_0 便使 x_0,y_0 $(y_0\doteq P_Gx_0)$是最近点对,因而存在. 今一般赋范空间中可设 F 是紧凸集,P_F,P_G 单值连续则 P_FP_G 是 F 映入 F 连续映射. 由 Schauder 不动点定理立刻知 P_FP_G 有不动点 x_0,即 $x_0=P_FP_Gx_0$. 如果对赋范空间建立这样的命题,即一定条件下不动点 x_0 导致 x_0,y_0 是最近点对(因而存在),那么这亦是解决存在性的一条门径. 不过目前说[CG]的定理把 Hilbert 空间改成$(R_r)\cap(R)$ (自反严格凸)空间或$(R_r)\cap(R)\cap(H)$空间或(UR) (一致凸)空间成立否仍未获解决.

§3　最近点对唯一性

为了确保最近点对唯一性,对 F,G 凸性要加强限制. 线性拓扑空间中集合 A 叫"严凸集"乃指$\forall\ x,y\in\overline{A}$, $0<\theta<1$,则 $\theta x+(1-\theta)y\in\operatorname{int}A$ (予设 $\operatorname{int}A\neq\varnothing$).

显然严凸集必是凸体,故此单点集、有限集、线段、真子空间等都不是严凸集. 立刻知

命题 3.1　赋范空间是严格凸空间必须只须其中球体(开或闭)是严凸集.

命题 3.2　A 是严凸集,则凡 $\operatorname{int}A\subset B\subset\overline{A}$, B 也是严凸集.

这是因为凡凸体 A,$\overline{\operatorname{int}A}=\overline{A}$ 所以$\overline{\operatorname{int}A}=\overline{B}=\overline{A}$. 当 $x,y\in\overline{B}$ 则 $x,y\in\overline{A}$ 依 A 假设$\forall\ 0<\theta<1$, $\theta x+(1-\theta)y\in\operatorname{int}A$. 但 $\operatorname{int}A\subset\operatorname{int}B$ 故此 B 是严凸集.

注意 int A, $\overline{A}$ 严凸未必 A 严凸. 例如 A 是 $\mathbf{R}^2$ 中单位园 $\xi^2+\eta^2<1$ 与园环区 $1\leqslant\sqrt{\xi^2+\eta^2}<2$ 中之一切有理坐标点的并集则 int A$=\{(\xi,\eta):\ \xi^2+\eta^2<1\}$与 $\overline{A}=\{(\xi,\eta):\ \ \xi^2+\eta^2\leqslant4\}$都是严凸集,但 A 不是严凸集. 此外注意定义中 $x,y\in\overline{A}$ 条件不能改作 $x,y\in A$,否则非(R)空间 l_1^2 (2维)中的开正方形(开球)也作为严凸集不合下面讨论的唯一性.

定理 3.3　赋范空间中 F,G 皆严凸集,则最近点对(如果存在)必唯一.

证明　第一首先证(x_0,y_0), (x_0,y_1), $y_0\neq y_1$ 这样的两组最近点对是不存在的. 因为由 $\|x_0-y_0\|=\|x_0-y_1\|=\rho(F,G)$. 依基本引理此值等于 $\rho(x_0,G)$,而 G 凸易推 $\|x_0-\frac{y_0+y_1}{2}\|=\rho$

(x_0,G). 又由于 G 是严凸集故此$\frac{y_0+y_1}{2}\in \mathrm{int}G$. 故线段 $\lambda x_0+(1-\lambda)\frac{y_0+y_1}{2}$ $(\forall\ 0<\lambda<1)$上的点当 λ 充分小便见存在 $y'\in G$,导致 $\| x_0-y'\| < \| x_0-\frac{y_0+y_1}{2}\| =\rho(x_0,G)$矛盾.

其次若有(x_0,y_0) (x_1,y_1) $x_0\neq x_1$, $y_0\neq y_1$ 这样的两组最近点对,作 $\varphi(\lambda)\doteq \| \lambda x_0+(1-\lambda)x_1-\lambda y_0-(1-\lambda)y_1\|$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. 写成 $\varphi(\lambda)=\| \lambda(x_0-x_1-y_0+y_1)+(x_1-y_1)\|$. 先设 $x_0-x_1\neq y_0-y_1$ 即 $u\doteq(x_0-x_1)-(y_0-y_1)\neq 0$. 由于凡 $\varphi(\lambda)=\|\lambda u+v\|$ 当 $u\neq 0$ 时它必在一有限区间$[\lambda',\lambda'']$或一点 $\lambda'(\lambda'=\lambda''$ 情形) 到达最小值. 今既知 $\varphi(\lambda)$ 当 $\lambda=0,1$ 都到达最小值 ρ,因此当着 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 也必有 $\varphi(\lambda)=\rho$. 取 $\lambda=\frac{1}{2}$, $\varphi(\frac{1}{2})=\| \frac{x_0+x_1}{2}-\frac{y_0+y_1}{2}\|$. 但由于 G 严凸性,$\frac{y_0+y_1}{2}\in \mathrm{int}G$. 同上段之理,在开线段$(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2})$中找充分近$\frac{y_0+y_1}{2}$的 y' 使 $y'\in G$,于是 $\| \frac{x_0+x_1}{2}-y'\| <\rho$. 这与 $\rho=\rho(\frac{x_0+x_1}{2},G)$相矛盾.

最后设 $x_0-x_1=y_0-y_1$. 此时 $\varphi(\lambda)$ 为常值 $\varphi(\lambda)=\|v\|=\|x_1-y_1\|=\|x_0-y_0\|=\rho$. 立刻知 $\| \frac{x_0+x_1}{2}-\frac{y_0+y_1}{2}\| \leqslant \| \frac{x_0-y_0}{2}\| +\| \frac{x_1-y_1}{2}\| =\rho$. 因而 $\| \frac{x_0+x_1}{2}-\frac{y_0+y_1}{2}\| =\rho$. 也照刚才导致矛盾. 故此最近点对唯一.

定理 3.4 严格凸赋范空间中 F,G 其中一个是严凸集,另一个是凸集,则最近点对(如果存在)必唯一.

因此如 G 严凸,F 凸. 似前定理之证了第一情形. 若有(x_0,y_0) (x_1,y_0) $(x_0\neq x_1)$,同时是最近点对,则使用基本引理 y_0 到 F 有两个佳逼元 x_0,x_1. 但空间是(R)的,F 是凸集,故只能 $x_0=x_1$. 对以下情形仍照上定理之证仍由 G 严凸性推出.

注意如果不是在严凸空间中,则 F,G 一个严凸一个凸仍不能有唯一性结论. 例如 l_1^2 中 F 是单位球 $\|x\|\leqslant 1$ (不是严凸集),

$$G=\{(\xi,\eta):(\xi-2)^2+(\eta-2)^2\leqslant 2\}.$$

则 G 是严凸集. 记 $A=(1,1)$, $B=(1,0)$, $C=(0,1)$,则见 G 中 A 点到线段 BC 任一点的 l_1^2 距离都是 1,$\rho(F,G)=1$. 故此最近点对非唯一.

§4 F 对 G 近渡点

F,G 的最近点对 x_0,y_0 从一方看 x_0 具有性质 $\rho(x_0,G)=\rho(F,G)$. 这使我们推广一下概念有

定义 给 F,G $x_0\in F$,称 x_0 是 F 对 G 一个近渡点(nearest-cross point)乃指 $\rho(x_0,G)=\rho(F,G)$. 并记作 $x_0\in \Pi_F(G)$.

记得由基本引理 $\rho(F,G)=\inf\limits_{x\in F}\rho(x,G)$. 所以近渡点 x_0 是一种最佳逼近 G 的点. 特别当 G 是单点集$\{y\}$时,则 x_0 是度量投影 P_Fy 的一点. 近渡点意义好比从 F 选一渡口 x_0,到隔海一块陆地 G,使 x_0 到 G 最近渡船的行程为最短. 由基本引理立刻知

定理 4.1 若 x_0,y_0 是 F,G 的最近点对,则 x_0 是 F 对 G 的近渡点. 同样 y_0 是 G 对 F 的近渡点.

但反过来问题成立吗? 却是否定的. 比如 F,G 是两个“平行”的超平面,见[P2],则 F 中任一点 x_0 都是对 G 近渡点,G 中任一点 y_0 也是对 F 近渡点. 显然任配成对 x_0,y_0 不必是 F,G 的

最近点对.若更设超平面不可近则最近点对不存在.进一步又即使 F 的近渡点 x_0 存在唯一,G 的近渡点 y_0 也存在唯一,也可能(x_0,y_0)不是最近点对(实乃不存在).例如 $\mathbf{R}^2$ 中 F 是半园弧$(x-1)^2+y^2=1$,$x>1$ 添上弧端一点 $A=(1,1)$.G 是半园弧$(x+1)^2+y^2=1$,$x<-1$ 添上弧端一点 $B=(-1,1)$.则 $\rho(F,G)=2$,A 是 F 的唯一近渡点,B 是 G 的唯一近渡点.但 F,G 的最近点对不存在.讨论到存在性,即使 F,G 是可近集甚至 Chebyshev 集,也不能推近渡点存在.已见§2 一个象限区与一个双曲线区的例子.其次还可以一方近渡点存在而他方近渡点不存在.例如 l_1 中 F 是两点之集 $F=\{x_0,x_1\}$. $x_0=0$, $x_1=\{\frac{n+1}{-n2^n}\}$. $G=\{y=\{\eta_n\}: \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\eta_n=1\}$.则超平面方程有 $\varphi(y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\eta_n=1$ 有 $\|\varphi\|=\sup\limits_n\frac{n}{n+1}=1$. $\rho(0,G)=\frac{|\varphi(0)-1|}{\|\varphi\|}=1$ 见[P1]. $\rho(x_1,G)=\frac{|\varphi(x_1)-1|}{\|\varphi\|}=\|\sum\limits_1^{\infty}\frac{1}{-2^n}-1\|=2$, $\rho(F,G)=1$,故此 x_0 是 F 对 G 近渡点.但 G 对 F 近渡点不存在.

命题 4.2 设 F 对 G 近渡点存在,且 G 可近,则 F,G 的最近点对 x_0,y_0 存在.

这是因为由近渡点定义 $\rho(x_0,G)=\rho(F,G)$.由 G 可近之设,存在 $y_0\in G$ 使 $\rho(x_0,G)=\rho(x_0,y_0)$.因此 $\rho(x_0,y_0)=\rho(F,G)$, x_0,y_0 是最近点对.

下面提供近渡点存在一个充分性定理.先有

引理 4.3 G 凸,则 $H\doteq\{x:\rho(x,G)\leqslant c\}$是凸集($c$ 是常数).

事实上,给 $x,x'\in H$, $\rho(x,G)\leqslant c$, $\rho(x',G)\leqslant c$. $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ y\in G$ 使 $\rho(x,y)<\rho(x,G)+\varepsilon$, $\exists\ y'\in G$ 使 $\rho(x',y')<\rho(x',G)+\varepsilon$.对$\forall\ 0\leqslant\theta\leqslant 1$.记 $\theta'=1-\theta$,因为 G 凸,$\theta y+\theta' y'\in G$,故此

$$\rho(\theta x+\theta' x',G)\leqslant\|\theta x+\theta' x'-(\theta y+\theta' y')\|\leqslant\theta\|x-y\|+\theta'\|x'-y'\|$$
$$\leqslant\theta\rho(x,G)+\varepsilon+\theta'\rho(x,G)+\varepsilon\leqslant\theta c+\theta' c+2\varepsilon=c+2\varepsilon.$$

θ 任意小,故此 $\rho(\theta x+\theta' x',G)\leqslant c$.故此 H 凸.

定理 4.4 F 弱紧 G 凸,则 F 对 G 近渡点存在.

证明 存在极小化列$\{x_n\}\subset F$, $\rho(x_n,G)\to\inf\limits_{x\in F}\rho(x,G)$.由基本引理,右方$=\rho(F,G)=\rho$.由于 F 弱紧,乃有子列 $x_{n_i}\xrightarrow{W}x_0\in F$.来证明

$$\rho(x_0,G)\leqslant\varliminf_i\rho(x_{n_i},G) \tag{A}$$

假若(A)式不真,则有子列(仍记 x_{n_i})使 $\rho(x_{n_i},G)<c<\rho(x_0,G)$. c 与 i 无关.命 $F=\{x:\rho(x,G)\leqslant c\}$.它是闭集.用刚才引理 F 是凸集.而 $\rho(x_0,G)>c$,故此 $x_0\notin F$.对 x_0 与 F 用强分离定理,$\exists\ a$, f 使 $f(x_0)<a<f(y)\quad\forall\ y\in F$.包括 $\rho(y,G)\leqslant C$ 时 $f(y)>a$.特别取 y 为 x_{n_i} 有 $f(x_{n_i})>a$.故此 $f(x_0)>a>f(x_{n_i})$这与 $x_{n_i}\xrightarrow{W}x_0$ 发生矛盾.故此(A)成立.

再由$\{x_n\}$定义 $\rho(x_{n_i},G)\to\rho(F,G)$.乃有 $\rho(x_0,G)\leqslant\rho(F,G)$.另一方面有 $\rho(x_0,G)\geqslant\rho(F,G)$,故此 $\rho(x_0,G)=\rho(F,G)$. x_0 就是 F 对 G 的近渡点.

定理 4.4 当不设 G 的凸性时是不成立的.反例是 $L_2[0,2\pi]$中 $F=\{x:\ \|x\|\leqslant 1/2\}$, $G=\{y_n\}\quad n=1,2,\cdots$,这里 $y_n=y_n(t)=(1+1/n)^{1/2}\cdot\sin nt/\sqrt{\pi}$.因为 $L_2[0,2\pi]$是自反空间,故此 F 球是弱紧的.先证明 $\rho(F,G)=1/2$.由于 $\|\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\|=1$. $\forall\ x(t)\in F$, $y_n(t)\in G$ 有

$\| x(t)-y_n(t) \| \geqslant \| y_n(t) \| - \| x(t) \| = (1+1/n)^{1/2}-\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$，故此 $\rho(F,G)\geqslant 1/2$. 另一方面取 $x(t)$ 为 $\frac{\sin nt}{2\sqrt{\pi}}$，

$$\| \rho(F,G) \| \leqslant \frac{\sin nt}{2\sqrt{\pi}} - (1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \| = (1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2},$$

使 $n\to\infty$ 故此 $\rho(F,G)\leqslant 1/2$ 乃得 $\rho(F,G)=1/2$.

其次证 F 对 G 近渡点不存在，假若有 $x_0=x_0(t)$ 是近渡点，$\inf\limits_n \| x_0(t)-(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \| = \frac{1}{2}$. 首先一定 $\| x_0 \| =1/2$（因为 x_0 不会是 F 内点）. 今不外 $\inf\limits_n$ 于某 $n=n_0$ 时到达或者有某子列 n_i 使 $\lim\limits_i \| x_0(t)-y_{n_i}(t) \| = \frac{1}{2}$.

前者 $\frac{1}{2}= \| x_0(t)-(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}\frac{\sin n_0 t}{\sqrt{\pi}} \|$，平方得

$$\frac{1}{4} = \| x_0 \|^2 + (1+\frac{1}{n_0}) - 2(1+\frac{1}{n_0})^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{x_0(t)\sin n_0 t}{\sqrt{\pi}}dt.$$

化为

$$(1+\frac{1}{n_0})^{\frac{1}{2}} = 2\int_0^{2\pi}\frac{x_0(t)\sin n_0 t}{\sqrt{\pi}}dt.$$

但右方 $\leqslant 2\| x_0 \| \cdot \| \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \| = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=1$. 故此式矛盾.

最后若有 $\lim\limits_i \| x_0(t) - (1+\frac{1}{n_i})^{\frac{1}{2}}\frac{\sin n_i t}{\sqrt{\pi}} \| = \frac{1}{2}$. 范数平方展开

$$\| x_0 \|^2 - 2(1+\frac{1}{n_i})^{\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{x_0(t)\sin n_i t}{\sqrt{\pi}}dt + (1+\frac{1}{n_i}) = \frac{1}{4}+o(1) \qquad (i\to\infty)$$

化简为

$$(1+\frac{1}{n_i})^{\frac{1}{2}} - 2\int_0^{2\pi}\frac{x_0(t)\sin n_i t}{\sqrt{\pi}}dt = o(1).$$

但据 Riemann－Lebesgue 定理，第二项是 $o(1)$ 的，化为 $(1+\frac{1}{n_i})^{\frac{1}{2}}=o(1)$ 矛盾.

故证明了 F 对 G 近渡点不存在（此例 G 对 F 近渡点也不存在）.

末考虑近渡点的唯一性.

定理 4.5　设 F 是严凸集，G 凸则 F 对 G 近渡点 x_0（如果存在）必唯一.

证明　若有 $x_0,x_1\in F$，$x_0\neq x_1$ 使 $\rho(x_1,G)=\rho(x_2,G)=\rho(F,G)$. 由 F 严凸性，开线段 $(x_0,x_1)\subset \mathrm{int}F$. 对 $\frac{x_0+x_1}{2}$ 点，$\exists\ \eta>0$（不妨 $\eta<1$）使球 $\bar{U}(\frac{x_0+x_1}{2},\eta)\subset F$. 取定 η 后取 $\varepsilon>0$ 充分小使 $(1-\eta)(1+\varepsilon)<\rho$. 对 ε，$\exists\ y_\varepsilon\in G$ 使 $\rho\leqslant\rho(x_0,y_\varepsilon)<\rho(x_0,G)+\varepsilon$，$\exists\ Z_\varepsilon\in G$ 使 $\rho\leqslant\rho(x_1,Z_\varepsilon)<\rho(x_1,G)+\varepsilon$. 命 $w=\frac{y_\varepsilon+Z_\varepsilon}{2}$，$w\in G$（凸），$\| \frac{x_0+x_1}{2}-w \| = \| \frac{x_0-y_\varepsilon}{2}+\frac{x_1-Z_\varepsilon}{2} \| \leqslant \frac{\rho+\varepsilon}{2}+\frac{\rho+\varepsilon}{2}=\rho+\varepsilon$. 命 $\bar{x}=\frac{x_0+x_1}{2}-\frac{\eta}{\rho+\varepsilon}(\frac{x_0+x_1}{2}-w)$，有 $\| \bar{x}-\frac{x_0+x_1}{2} \| \leqslant \frac{\eta}{\rho+\varepsilon} \| \frac{x_0+x_1}{2}-w \| \leqslant \eta$，于是 $\bar{x}\in\bar{U}(\frac{x_0+x_1}{2})\subset F$. 而

$$\| \bar{x}-w \| = \| \frac{x_0+x_1}{2}(1-\eta)-w(1-\eta) \| = (1-\eta)\| \frac{x_0+x_1}{2}-w \|$$

$$\leqslant (1-\eta)(\rho+\varepsilon) < \rho$$

此与 $\rho = \inf\limits_{x\in F, y\in G} \rho(x,y)$ 意义相矛盾，故此 $x_0 = x_1$.

注意对调条件改为 F 凸，G 严凸，并不保证近渡点 $x_0 \in F$ 的唯一性. 这已在 § 3 末的例子说明了.

参 考 文 献

[CG] E. Cheney—A. Goldstein, *Proximity maps for convex sets*, Pro. Amer. Math. Soc. 10(1959), 448—450.

[P1] 潘文熙，可逼近集及投影界的某些问题及新结果，数学季刊，4 卷 2 期(1989), 39—48.

[P2] 潘文熙，直线与仿射集的关系及距离性分离定理，暨南大学学报(自然科学)1992 年，13 卷 3 期, 14—18.

[P3] 潘文熙，集合的距离与近渡点的性质，数学杂志, Vol. 3(1994), 491—497.

[Pai] D. V. Pai, *proximal points of convex sets in normed linear spaces*, Yokohama Math. Jour. 22(1974), 53—78.

[S] B. N. Sahney—S. P. Singh, *On best simultaneous approximation in "Approximation Theory* Ⅲ" 1980 *Texas*, 783—789.

[Xu] *Xu Xubin*, *Best proximity pair of two sets*, Jour. Appr. Theory 54. 3 (1988), 322—325.

On the Existence and Uniqueness of Proximity Pairs and Nearest-Cross Points

Pan Wenxi

(Jinan University)

Abstract

Some theorems concerning existence and uniqueness of proximity pairs and nearest-cross points are given. Also discussed are some relations about proximity pair and proximity maps P_F and P_G.

Keywords proximity pair, pair of nearest-cross points, strictly convex set.