关于体上矩阵方程 $A_{m\times n}X_{n\times s}=B_{m\times s}$ 的解*

王 卿 文
(山东昌潍师专数学系，潍坊 261043)

摘 要 根据体上矩阵研究的新近进展，本文给出了任意体上的矩阵方程

$$A_{m\times n}X_{n\times s}=B_{m\times s} \tag{1}$$

的解判别定理及其通解的显式表示，并给出了(1)的一种有实用价值的简便解法.

关键词 体，矩阵方程，基础解阵.
分类号 AMS(1991) 15A24, 15A33/CCL O151.21

§1 基本引理

我们约定 F 表示任意的体，$M_{m\times n}(F)$ 表示 F 上的全体 $m\times n$ 矩阵. 文[2－3]定义了 F 上矩阵的初等行(列)变换. 由[2－4]可得以下引理.

引理 1.1[3] 设 $A\in M_{m\times n}(F)$，E_n 是单位阵 I_n 上进行初等列变换 T 而得到的初等阵，则 AE_n 是 A 上作用 T 所得的矩阵.

引理 1.2[2] 在体上，若方阵 P,Q 均可逆，则对任意的矩阵 A，只要可乘就有

$$r(A)=r(AP)=r(PAQ),$$

这里 $r(M)$ 表示矩阵 M 的秩.

引理 1.3[3] 关于 $A\in M_{n\times n}(F)$ 的以下诸条件等价：

(i) $r(A)=n$. (ii) A 是可逆的. (iii) A 是一些初等阵的乘积.

引理 1.4[2] 在 F 上，恒有 $r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}$.

引理 1.5[2] 在 F 上，若 $r(A_{m\times n})=r(<n)$，则齐次线性方程组 $AX=0$ 有基础解系，且含 $n-r$ 个解向量；而任意的 $n-r$ 个解向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 若满足 $[\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}]$ 非左零因子，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 必为其一基础解系.

引理 1.6[4] 设 A 是 F 上矩阵 $\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$ 的 $r\times r$ 可逆子阵，则 $r\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=r+r(D-CA^{-1}B)$.

引理 1.7 $A\in M_{m\times n}(F)$，$r(A)=r$，则存在可逆阵 $Q\in M_{n\times n}(F)$ 使 $AD=[D_{m\times r},0_1,\cdots,0_{n-r}]$，其中 $D_{m\times r}$ 为列满秩阵，零向量 $0_i\in F^m(i=1,\cdots,n-r)$.

---

* 1992年6月9日收到. 94年2月24日收到修改稿.

§2 体上矩阵方程(1)的有解判定

定理 2.1 F 上的矩阵方程(1)有解的充要条件是 $r(A)=r(A,B)=r(0\leqslant r\leqslant\min\{m,n\})$.

证明 设 $r(A)=r$,则有可逆阵 P,Q 使

$$PAQ=\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

令 $Y=Q^{-1}X,PB=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}$,其中 B_1 为 $r\times s$ 矩阵,B_2 为 $(m-r)\times s$ 矩阵,则

$$(1)\text{ 有解}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Y=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}\text{ 有解}\Leftrightarrow B_2=0_{(m-r)\times s}.$$

由引理 1.2 知,

$$r(A,B)=r\left(P(A,B)\begin{pmatrix}Q & 0\\ 0 & I_s\end{pmatrix}\right)=r(PAQ,PB)=r\begin{pmatrix}I_r & 0 & B_1\\ 0 & 0 & B_2\end{pmatrix}.$$

故由引理 1.6 得,

$$B_2=0_{(m-r)\times s}\Leftrightarrow r(A,B)=r\begin{pmatrix}I_r & 0 & B_1\\ 0 & 0 & B_2\end{pmatrix}=r.$$

从而(1)有解$\Leftrightarrow B_2=0_{(m-r)\times s}\Leftrightarrow r(A,B)=r=r(A)$.

定义 2.1 称

$$A_{m\times n}X_{n\times s}=0_{m\times s}\tag{2.1}$$

为(1)的导出方程;而以齐次右线性方程组

$$A_{m\times n}X_{n\times 1}=0_{m\times 1}\tag{2.2}$$

的一个基础解系为列构成的矩阵 $N_{n\times(n-r)}$ 称为(2.1)的基础解阵.

显然,矩阵方程(1)的任意两个解之差必为其导出方程(2.1)的解.

定理 2.2 设矩阵

$$C=\begin{bmatrix}A_{m\times n} & -B_{m\times s}\\ I_n & 0\\ 0 & I_s\end{bmatrix},$$

其中 $r(A_{m\times n})=r$,则 C 总可经过一系列初等列变换化为

$$G=\begin{bmatrix}D_{m\times r} & 0_1 & \cdots & 0_{n-r} & E_{m\times s}\\ M_{n\times r} & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-r} & F_{n\times s}\\ 0_{s\times r} & 0_1' & \cdots & 0_{n-r}' & I_s\end{bmatrix},$$

且

$$(A_{m\times n},\ -B_{n\times s})P_{n+s}=(D_{m\times r},0_1,\cdots,0_{n-r},E_{m\times s}),\tag{2.3}$$

$$I_{n+s}P_{n+s}=\begin{bmatrix}M_{n\times r} & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-r} & F_{n\times s}\\ 0_{s\times r} & 0_1' & \cdots & 0_{n-r}' & I_s\end{bmatrix},\tag{2.4}$$

这里,$D_{m\times r}$ 为列满秩阵,$E_{m\times s}$ 或者为 $0_{m\times s}$ 或至少有一列与 $D_{m\times r}$ 的各列组成的矩阵为非左零因子;$0_i\in F^m$、$0_i'\in F^s(i=1,\cdots,n-r)$均为零向量;$\alpha_i\in F^n(i=1,\cdots,n-r)$,$P_{n+s}$ 为 F 上的 $n+s$ 阶可逆阵.

证明 由于 $r(A)=r$，故由引理 1.7 知存在可逆阵 $Q\in M_{n\times n}(F)$ 使 $AQ=(D_{m\times r},0_1,0_2,\cdots,0_{n-r})$. 作矩阵 $P_{n+s}=\begin{pmatrix}Q_{n\times n} & F_{n\times s}\\ 0 & I_s\end{pmatrix}$. 由引理 1.6 知，$r(P_{n+s})=n+s$. 又由引理 1.3 知，$P_{n+s}$ 可逆. 令 $Q_{n\times n}=(M_{n\times r},\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r})$，其中 $\alpha_i\in F^n(i=1,2,\cdots,n-r)$，$0_{s\times n}=(0_{s\times r},0_1',\cdots,0_{n-r}')$，其中 $0_i'\in F^s,i=1,\cdots,n-r$；再令 $A_{m\times n}F_{n\times s}-B_{m\times s}=E^0_{m\times s}$，则

$$\begin{pmatrix}A_{m\times n} & -B_{m\times s}\\ I_n & 0\\ 0 & I_s\end{pmatrix}P_{n+s}=\begin{pmatrix}A_{m\times n}Q_{n\times n} & A_{m\times n}F_{n\times s}-B_{m\times s}\\ Q_{n\times n} & F_{n\times s}\\ 0_{s\times n} & I_s\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}D_{m\times r} & 0_1 & \cdots & 0_{n-r} & E^0_{m\times s}\\ M_{n\times r} & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-r} & F_{n\times s}\\ 0_{s\times r} & 0_1' & \cdots & 0_{n-r}' & I_s\end{pmatrix}=G_1. \tag{2.5}$$

由引理 1.1 及引理 1.3 知，C 可经过一系列初等列变换化为 G_1 的形式. 若 $E^0_{m\times s}$ 中的各列与 $D_{m\times r}$ 的各列构成的矩阵为左零因子，则对 G_1 连续施行初等列变换，可将 $E^0_{m\times s}$ 化为 $0_{m\times s}$. 于是，C 总可经过一系列初等列变换化为 G 的形式. 由(2.5)式及矩阵的相等立得(2.3)及(2.4)式.

推论 2.1 矩阵方程(1)有解的充要条件是矩阵 G 中的 $E_{m\times s}=0_{m\times s}$.

证明 由定理 2.1 知，(1)有解$\Leftrightarrow r(A)=r(A,B)=r$. 由引理 1.2 知，$r(A,B)=r(A,-B)=r((A,-B)P_{n+s})=r(D_{m\times r},0_1,\cdots,0_{n-r},E_{m\times s})$，这里 $D_{m\times r}$ 为列满秩阵. 因 $E_{m\times s}$ 或为 $0_{m\times s}$ 或至少有一列与 $D_{m\times r}$ 的各列组成的矩阵非左零因子，故

$$r(D_{m\times r},0_1,\cdots,0_{n-r},E_{m\times s})=r\Leftrightarrow E_{m\times s}=0_{m\times s}.$$

所以，(1)有解$\Leftrightarrow E_{m\times s}=0_{m\times s}$.

§3 主要结果

定理 3.1 若(1)有解，则矩阵 G 中的 $F_{n\times s}$ 为(1)的一个特解，而以 G 中的 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 为列的矩阵 $N=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r})$ 为(1)的导出方程(2.1)的基础解阵.

证明 由推论 2.1 知，(1)有解则必有 $E_{m\times s}=0_{m\times s}$. 将(2.4)式代入(2.3)式，得

$$(A_{m\times n},\ -B_{m\times s})\begin{pmatrix}M_{m\times r} & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-r} & F_{n\times s}\\ 0_{s\times r} & 0_1' & \cdots & 0_{n-r}' & I_s\end{pmatrix}=(D_{m\times r},0_1,\cdots,0_{n-r},0_{m\times s}). \tag{3.1}$$

从而有 $A_{m\times n}\alpha_i-B_{m\times s}0_i'=0_i$. 由于 0_i 及 $0_i'$ 均为零向量，故有 $A_{m\times n}\alpha_i=0_{m\times 1}(i=1,\cdots,n-r)$. 此示，$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 为(2.2)的解向量. 又由(2.4)式知，$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r})$非左零因子，故由引理 1.5 知，$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 是(2.2)的一个基础解系. 从而，$N=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r})$为(2.1)的基础解阵. 由(3.1)式得

$$(A_{m\times n},\ -B_{m\times s})\begin{pmatrix}F_{n\times s}\\ I_s\end{pmatrix}=0_{m\times s}.$$

故 $A_{m\times n}F_{n\times s}=B_{m\times s}$. 此示，$F_{n\times s}$ 为(1)的一个特解.

定理 3.2 若(1)有解，则其一般解为

$$X_{n\times s}=F_{n\times s}+N_{n\times(n-r)}D_{(n-r)\times s}, \tag{3.2}$$

其中 $F_{n\times s}$ 为(1)的一个特解，$N_{n\times(n-r)}$ 为(1)的导出方程(2.1)的基础解阵，$D_{(n-r)\times s}$ 为 F 上的任意阵.

证明 因 $F_{n\times s}$ 为(1)的一特解,$N_{n\times(n-r)}$ 为(1)的导出方程(2.1)的基础解阵,故

$$A_{m\times n}F_{n\times s}=B_{m\times s},\ A_{m\times n}N_{n\times(n-r)}=0_{m\times(n-r)}.$$

从而,对任意的 $D\in M_{(n-r)\times s}(F)$,有 $A_{m\times n}(F_{n\times s}+N_{n\times(n-r)}D)=B_{m\times s}$. 故(3.2)式为(1)的解.

反之,设 $X_{n\times s}$ 为(1)的任一解,则 $X_{n\times s}-F_{n\times s}$ 为(1)的导出方程(2.1)的解,即 $A_{m\times n}(X_{n\times s}-F_{n\times s})=0_{m\times s}$. 令 $X_{n\times s}-F_{n\times s}=(\beta_1,\cdots,\beta_s)$,则 $\beta_i(i=1,\cdots,s)$为(2.2)的解向量,从而可表成(2.2)的基础解系 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 的右线性组合. 于是$(\beta_1,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r})D_{(n-r)\times s}$,其中 $D_{(n-r)\times s}$ 为 F 上的矩阵. 故 $X_{n\times s}=X_{n+s}+N_{n\times(n-r)}D_{(n-r)\times s}$. 此示(1)的任意解可表成(3.2)的形式.

推论 3.1 若(1)有解,则

(i) $r(A)=n$ 时,(1)有唯一解; (ii) $r(A)<n$ 时,(1)有无穷多解.

综上即得求(1)的通解的具体步骤:

(i) 作出矩阵 $C=\begin{bmatrix}A_{m\times n} & -B_{m\times s}\\ & I_{n+s}\end{bmatrix}$;

(ii) 对 C 施行一系列初等列变换化为 G 的形式,若 $E_{m\times s}=0_{m\times s}$,则(1)有解,否则无解;

(iii) 若(1)有解,则 $F_{n\times s}$ 为(1)的解,以 G 中的 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 为列的矩阵 N 为(2.1)的基础解阵,于是,(1)之通解可由(3.2)式写出.

作者对李师正教授的指导深表谢意!

参 考 文 献

[1] 庄瓦金,四元数体上的矩阵方程,数学学报,30:5(1987),688—694.

[2] 谢邦杰,环与体上的矩阵及两类广义 Jordan 形式,吉林大学自然科学学报,1(1978),21—46.

[3] T. W. Hungerford, *Algebra*,冯克勤译,湖南教育出版社,1985.

[4] 居伯埙,p-除环上矩阵的广义逆,数学学报,29:2(1986),246—248.

On Solutions of the Matrix Equation $A_{m\times n}X_{n\times s}=B_{m\times s}$ over a Skew Field

Wang Qingwen

(Dept. of Math., Changwei Teacher College, Weifang 261043)

Abstract

For the matix equation

$$A_{m\times n}X_{n\times s}=B_{m\times s} \tag{1}$$

over an arbitrary skew field F. We give a consistency criterion and a practical simple method for solving (1). An explicit expression of general solutions of (1) is also derived.

Keywords skew field, matrix equation, basic solution matrix.