第15卷第2期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 2
1995年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1995

一些新的多重 Rogers-Ramanujan 恒等式*

张祥德 刘学生
(东北大学自控系，110008) (大连大学工学院，116012)

摘 要 本文利用初等方法简捷地推广了 Paule 的结果，从而得到了一系列多重 Rogers-Ramanujan 恒等式.

关键词 q-级数，恒等式/Rogers-Ramanujan 恒等式.
分类号 AMS(1991) 05A/CCL O157.1

§1 序言及主要结果

设 a,q 是实数，$|q|<1$，定义 $(a)_n=(a;q)_n=\prod_{i=1}^{n}(1-aq^{i-1})$，$(a)_\infty=\prod_{i=1}^{\infty}(1-aq^{i-1})$；$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=(q)_n/((q)_k(q)_{n-k})$ 表示 Gauss 二项式系数. 我们有

$$\sum_m\frac{a_mx^mq^{bm^2}}{(q)_{n-lm-r}(xq)_{n+lm}}=\sum_{n\geqslant n_1\geqslant 0}\frac{q^{(n_1-\frac{r}{2})^2}x^{n_1}}{(q)_{n-n_1}}\sum_m\frac{a_mq^{bm^2-(lm+\frac{r}{2})^2}x^{(1-l)m-r}}{(q)_{n_1-lm-r}(xq)_{n_1+lm}}\qquad(1)$$

l 是正整数，r 是非负整数.

在(1)中取 $l=1,b=r=0$. 限制 m 取非负整数，有

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{a_mx^m}{(q)_{n-m}(xq)_{n+m}}=\sum_{n_1=0}^{n}\frac{q^{n_1^2}x^{n_1}}{(q)_{n-n_1}}\sum_{m=0}^{n_1}\frac{a_mq^{-m^2}}{(q)_{n_1-k}(xq)_{n_1+k}}\qquad(2)$$

(2)是文[2]的公式(1)，且是 Bailey 引理的一个重要特例；但本文公式(1)似乎不能由 Bailey 引理导出，并且本文给出的证明比文[2]中的证明较简洁初等. 连续应用(1)得到

$$\sum_m\frac{a_mx^mq^{bm^2}}{(q)_{n-lm-r}(xq)_{n+lm}}=\sum_{n\geqslant n_1\geqslant\cdots\geqslant n_k\geqslant 0}\frac{q^{(n_1-\frac{r}{2})^2+\cdots+(n_k-\frac{r}{2})^2}x^{n_1+n_2+\cdots+n_k}}{(q)_{n-n_1}(q)_{n_1-n_2}\cdots(q)_{n_{k-1}-n_k}}\sum_m\frac{a_mq^{bm^2-k(lm+\frac{r}{2})^2}x^{(1-kl)m-kr}}{(q)_{n_k-lm-r}(xq)_{n_k+lm}}\qquad(3)$$

应用(3)可将一些 Rogers-Ramanujan 恒等式嵌入到多重形式，我们有

$$\frac{1}{(q)_\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(1-q^{6m+1})q^{(9k+6)m^2+(3k-1)m}=\sum_{n_1,n_2,\cdots,n_k\geqslant 0}\frac{q^{M_1^2+M_2^2+\cdots+M_k^2+M_1+M_2+\cdots+M_k}}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}\cdots(q)_{n_{k-1}}(q)_{2n_k}}\qquad(4)$$

$$M_i=\sum_{j=i}^{k}n_j\quad i=1,2,\cdots,k$$

* 1993年1月7日收到.

$$\frac{1}{(q)_\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(1-q^{6m+1})q^{(9k+3)m^2+(3k-2)m}=\sum_{n_1,n_2,\cdots,n_k\geq 0}\frac{q^{M_1^2+M_2^2+\cdots+M_{k-1}^2+2M_k^2+M_1+M_2+\cdots+M_{k-1}}}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}\cdots(q)_{n_{k-1}}(q)_{2n_k}} \tag{5}$$

$$\frac{1}{(q)_\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(1-q^{6m+2})q^{(9k+6)m^2+(6k+1)m}=\sum_{n_1,n_2,\cdots,n_k\geq 0}\frac{q^{M_1^2+M_2^2+\cdots+M_k^2+2M_1+2M_2+\cdots+2M_k}}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}\cdots(q)_{n_{k-1}}(q)_{2n_k}} \tag{6}$$

$$\frac{1}{(q)_\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(1-q^{6m+2})q^{(9k+3)m^2+(6k+1)m}=\sum_{n_1,n_2,\cdots,n_k\geq 0}\frac{q^{M_1^2+M_2^2+\cdots+M_{k-1}^2+2M_k^2+2M_1+2M_2+\cdots+2M_k}}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}\cdots(q)_{n_{k-1}}(q^2)_{2n_k}} \tag{7}$$

$$\frac{1}{(q)_\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m(1-q^{6m+1})q^{(9k+9/2)m^2+3km-3^m/2}$$

$$=\sum_{n_1,n_2,\cdots,n_k\geq 0}\frac{q^{M_1^2+M_2^2+\cdots+M_k^2+M_1+M_2+\cdots+M_k}(q^3;q^3)_{n_k-1}}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}\cdots(q)_{n_{k-1}}(q)_{2n_k}(q)_{n_k-1}} \tag{8}$$

$$\frac{1}{(q)_\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m(1-q^{6m+2})q^{(9k+9/2)m^2+6km}=\sum_{n_1,n_2,\cdots,n_k\geq 0}\frac{q^{M_1^2+M_2^2+\cdots+M_k^2+2M_1+2M_2+\cdots+2M_k}(q^{\frac{3}{2}})_{n_k}}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}\cdots(q)_{n_{k-1}}(q^2)_{2n_k}(q^{1/2})_{n_k}} \tag{9}$$

在(5)－(9)中也有 $M_i=\sum_{j=i}^{k}n_j,\ i=1,2,\cdots,k.$

§2　主要结果的推导

在文[1]公式(2.1) $(tq)^{-1}=\sum_{k=0}^{m-r}\begin{bmatrix}m-r\\k\end{bmatrix}t^kq^{k(k+r)}/(tq)_{k+r}$ 中先以 $n-lm$ 代替 m，再以 xq^{2lm} 代 t，并注意到 $(xq)_{2lm}(xq^{2lm+1})_{n-lm}=(xq)_{n+lm}$ 和 $(xq)_{2lm}(xq^{2lm+1})_{k+r}=(xq)_{2lm+k+r}$ 知

$$\frac{1}{(xq)_{n+lm}}=\sum_{k=0}^{n-lm-r}\frac{(q)_{n-lm-r}q^{k(k+r)+2lmk}x^k}{(q)_k(q)_{n-lm-k-r}(xq)_{2lm+k+r}} \tag{10}$$

从而 $\sum_m\frac{a_mq^{bm^2}x^m}{(q)_{n-lm-r}(xq)_{n+lm}}=\sum_m\frac{a_mq^{bm^2}x^m}{(q)_{n-lm-r}}\sum_{k=0}^{n-lm-r}\frac{x^kq^{k(k+r)+2lmk}(q)_{n-lm-r}}{(q)_k(q)_{n-lm-k-r}(xq)_{2lm+k+r}}.$

取 $n_1=lm+k+r$，交换求和顺序，整理得

$$\sum_m\frac{a_mq^{bm^2}x^m}{(q)_{n-lm-r}(xq)_{n+lm}}=\sum_{n\geq n_1\geq 0}\frac{q^{(n_1-\frac{r}{2})^2}x^{n_1}}{(q)_{n-n_1}}\sum_m\frac{a_mq^{bm^2-(lm+\frac{r}{2})^2}x^{(1-l)m-r}}{(xq)_{n_1+lm}(q)_{n_1-lm-r}}$$

故(1)得证.

在(3)中取 $l=3,r=0,x=q,a_m=\frac{1}{1-q}q^{(3k-2)m}(1-q^{6m+1}),b=9k+6$，有

$$\sum_m\frac{(1-q^{6m+1})q^{(9k+6)m^2+(3k-1)m}}{(q)_{n-3m}(q)_{n+3m+1}}=\sum_{n\geq n_1\geq\cdots\geq n_k\geq 0}\frac{q^{n_1^2+n_2^2+\cdots+n_k^2+n_1+n_2+\cdots+n_k}}{(q)_{n-n_1}(q)_{n_1-n_2}\cdots(q)_{n_{k-1}-n_k}}$$

$$\cdot\sum_m\frac{(1-q^{6m+1})q^{6m^2-m}}{(q)_{n-3m}(q)_{n+3m+1}} \tag{11}$$

利用文[3]中的公式(3.3)知(11)式等于 $\sum_{n\geq n_1\geq\cdots\geq n_k\geq 0}\frac{q^{n_1^2+n_2^2+\cdots+n_k^2+n_1+n_2+\cdots+n_k}}{(q)_{n-n_1}(q)_{n_1-n_2}\cdots(q)_{n_{k-1}-n_k}(q)_{2n_k}}.$

在(11)式两边令 $n\to+\infty$ 知

$$\frac{1}{(q)_\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(1-q^{6m+1})q^{(9k+6)m^2+(3k-1)m}=\sum_{\infty\geqslant n_1\geqslant\cdots\geqslant n_k\geqslant 0}\frac{q^{n_1^2+n_2^2+\cdots+n_k^2+n_1+n_2+\cdots+n_k}}{(q)_{n_1-n_2}\cdots(q)_{n_{k-1}-n_k}(q)_{2n_k}} \qquad (12)$$

在(12)式右端以 n_i' 代 n_i-n_{i+1}，$i\leqslant k-1$，n_k' 代 n_k，知 $n_i=\sum_{j=i}^{k}n_j'$，$1\leqslant i\leqslant k$，故(12)式右端成为

$$\sum_{n_1',n_2',\cdots,n_k'\geqslant 0}\frac{q^{n_1^2+n_2^2+\cdots+n_k^2+n_1+n_2+\cdots+n_k}}{(q)_{n_1'}(q)_{n_2'}\cdots(q)_{n_{k-1}'}(q)_{2n_k'}}.$$

再证 M_i 代 n_i，n_i 代 n_i'，$1\leqslant i\leqslant k$，则有

$$\sum_{n_1,n_2,\cdots,n_k\geqslant 0}\frac{q^{M_1^2+M_2^2+\cdots+M_k^2+M_1+M_2+\cdots+M_k}}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}\cdots(q)_{n_{k-1}}(q)_{2n_k}},\ M_i=\sum_{j=i}^{k}n_j$$

从而(4)式得证.

类似地利用文[3]中的公式(3.4)，(3.6)，(3.7)，(3.9)，(3.10)和(3)，可以证明(5)－(9).

参 考 文 献

[1] 初文昌，格路计数与经典分拆恒等式，系统科学与数学，12(1)(1992)，52—57.

[2] P. Paule, *A note on Bailey's lemma*, J. Combinatorial Theory, Series A, 44(1987), 164—167.

[3] L. J. Slater, *A new proof of Roger's transformation of infinite series*, Proc. London. Math. Soc., 53(2)(1951), 460—475.

Some New Multiple Rogers-Ramanujan Identities

Zhang Xiangde

(Dalian University of Technology, 116023)

Liu Xuesheng

(Dept. of Basic Courses, Dalian Univ.)

Abstract

Paule's result is extend. As a consequence some new multiple Rogers-Ramanujan identities are given.

Keywords q-series, identity, Rogers-Ramanujan identity.