在有限部分具有三个奇点的二次系统的极限环分布问题*

王 东 达
(吉林省白城师专数学系，137000)

摘　要　本文讨论了在有限部分具有三个奇点的二次系统 E_2^3 的极限环线分布问题.证明了 E_2^3 在有一个高次奇点的条件下,极限环线是集中分布的.

关键词　E_2^3 系统,极限环,分布.
分类号　AMS(1991) 34C05/CCL O175.12

文[1]讨论了在有限部分具有三个奇点的二次系统(记作 E_2^3)的无穷远奇点.文[3]证明了 E_2^3 的奇点状况只有两种可能：(1)一个非初等奇点,两个初等奇点；(2)三个初等奇点.下面给出：

定理　E_2^3 具有一个非初等奇点时,极限环线是集中分布的.

证明　E_2^3 经过非奇异的仿射变换,总可以把这三奇点变为 $O(0,0)$,$M(1,0)$,$N(0,1)$,于是它的方程式组可以写成(见文[1])

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=a_1x(x-1)+a_2y(y-1)+a_3xy,\\ \frac{dy}{dt}&=b_1x(x-1)+b_2y(y-1)+b_3xy.\end{aligned}\tag{1}$$

由于奇点指标是非奇异变换下的不变量,不妨设 $O(0,0)$ 是非初等奇点.还可进一步设 $M(1,0)$,$N(0,1)$ 为焦点.下面分别 (1)$a_2\neq0$; (2)$b_1\neq0$; (3)$a_2=0$ 或 $b_1=0$ 三种情况加以讨论.

当 $a_2=0$ 或 $b_1=0$ 时,显然系统(1)有直线解,则极限环至多一个,分布问题已解决.当 $b_1\neq0$ 时,只需把 x 和 y 互换,即化为 $a_2\neq0$ 的情况.这样一来,只要讨论 $a_2\neq0$ 就够了.

不失一般性,可以设 $a_2=1$,若不然,对系统(1)做时间变换 $d\tau=a_2dt$ 即可达到目的,于是只需考虑系统

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=a_1x(x-1)+y(y-1)+a_3xy,\\ \frac{dy}{dt}&=b_1x(x-1)+b_2y(y-1)+b_3xy.\end{aligned}\tag{2}$$

因为 $O(0,0)$ 为高次奇点,$q_0=a_1b_2-b_1=0$,所以 $b_1=a_1b_2$,于是系统(2)又可以写成

* 1992年1月16日收到.94年10月18日收到修改稿.

$$\frac{dx}{dt}=a_1x(x-1)+y(y-1)+a_3xy,$$
$$\frac{dy}{dt}=a_1b_2x(x-1)+b_2y(y-1)+b_3xy. \tag{3}$$

焦点 M,N 的指标分别是 $Q_m=a_1(b_3-a_3b_2)>0$；$Q_n=a_3b_2-b_3>0$，可见 $a_1<0$. 奇点 $M(1,0)$，$N(0,1)$的特征方程：

$$\lambda_M\equiv\lambda^2+(b_2-a_1-b_3)\lambda+a_1(b_3-a_3b_2)=0,$$
$$\lambda_N\equiv\lambda^2+(a_1-b_2-a_3)\lambda+(a_3b_2-b_3)=0. \tag{4}$$

文[5]指出，通过二次微分方程的任一奇点，只要它不是中心或焦点，至少存在一条无切直线. 我们可以求得过奇点 $O(0,0)$的两条无切直线. 令 $y=kx$，则 k 满足

$$-a_1b_2+(a_1-b_2)k+k^2=0, \tag{5}$$

得 $k_1=-a_1$，$k_2=b_2$，所以无切直线

$$F_1(x,y)\equiv y+a_1x=0,$$
$$F_2(x,y)\equiv y-b_2x=0. \tag{6}$$

这两条无切直线分平面为四个区域

Ⅰ区：$F_1>0,F_2>0$；Ⅱ区：$F_1>0,F_2<0$；Ⅲ区：$F_1<0,F_2<0$；Ⅳ区：$F_1<0,F_2>0$.

做 Dulac 函数如下：

$$B(xy)=\begin{cases}(y-b_2x)^k(y+a_1x)^{-1}, & \text{在 Ⅰ,Ⅳ 区},\\ (-y+b_2x)^k(y+a_1x)^{-1}, & \text{在 Ⅱ,Ⅲ 区}.\end{cases}$$

经过 $dt=B(x,y)d\tau$ 变换，则系统(3)的发散量可以表为

$$(BP)'_x+(BQ)'_y=\begin{cases}(y-b_2x)^{k-1}(y+a_1x)^{-2}(a_3+b_2-a_1)R(x,y) & \text{在 Ⅰ,Ⅳ 区},\\ (-y+b_2x)^{k-1}(y+a_1x)^{-2}(a_3+b_2-a_1)R(x,y) & \text{在 Ⅱ,Ⅲ 区},\end{cases}$$

其中 $R(x,y)$为三次齐次式：

$$R(x,y)=y^3+(\alpha k+\varepsilon_1)xy^2+a_1(\alpha k+\varepsilon_2)x^2y+\beta x^3,$$

这里 $\alpha=\frac{b_3-a_3b_2}{a_3+b_2-a_1}$；$\varepsilon_1=\frac{2a_1+3a_1b_2-a_3b_2-b_2^2}{a_3+b_2-a_1}$，$\beta=\frac{-a_1b_2(a_1-b_2+b_3)}{a_3+b_2-a_1}$；$\varepsilon_2=\frac{a_1-3b_2+b_3-2b_2^2}{a_3+b_2-a_1}$，选取适当的 k，可使 $R(xy)$表为下面两种形式

1） 当 $a_1^3+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)a_1^2-\beta\geqslant0$ 时，$R(x_1y)=(y+Ax)(y^2+B^2x^2)$，事实上，由比较系数法，只需方程组

$$A=\alpha k+\varepsilon_1,$$
$$B^2=a_1(\alpha k+\varepsilon_2), \tag{7}$$
$$AB^2=\beta$$

有解，消去 k,A，只需方程

$$F(B)=B^4+a_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1)B^2-a_1\beta=0 \tag{8}$$

有解，因为 $F(a_1)=a_1[a_1^3+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)a_1^2-\beta]\leqslant0$，可见方程(8)有解.

2） 当 $a_1^3+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)a_1^2-\beta<0$ 时，$R(x,y)=(y+Ax)(y+Bx)^2$，事实上，由比较系数，只需方程组：

$$2AB + B^2 = a_1(ak + \varepsilon_2),$$
$$A + 2B = ak + \varepsilon_1, \tag{9}$$
$$AB^2 = \beta$$

有解，消去 K，A，只需方程

$$f(B) = B^4 - 2a_1B^3 - a_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)B^2 + 2\beta B - a_1\beta = 0 \tag{10}$$

有解，因为 $f(a_1) = -a_1\{a_1^3 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)a_1^2 - \beta\} < 0$，可见方程(10)有解. 所以 $R(x,y)$ 能表为上述两种形式，直线 $y + Ax = 0$ 过奇点 O，其上至多还有一个切点，记作 P. 如果有两串极限环，则都应包含 P 于其内部，这是不可能的. 从而证明极限环是集中分布的.

参 考 文 献

[1] 王东达，在有限部分具有三个奇点的二次系统的无穷远奇点，数学实践与认识，1985,3.

[2] 陈兰荪、王明淑，二次系统极限的相对位置与个数，数学学报，Vol. 22(1979)，No. 6，P752.

[3] 董金柱，方程组 $\frac{dx}{dt} = \sum_{0\leq i+k\leq 2} a_{ik}x^iy^k, \frac{dy}{dt} = \sum_{0\leq i+k\leq i} b_{ik}x^iy^k$ 的奇点指数分布与其极限环的位置，数学学报，Vol. 8，No. 2，1958.

[4] 秦元勋，微分方程所定义的积分曲线，科学出版社，1959.

[5] 余澍祥，关于二次微分方程的极限环，数学学报，Vol. 20，No. 3，1977.

[6] 叶彦谦，极限环论，上海科技出版社，1984.

Distribution of the Limit Cycles of the Quadratic System with Three Singular Points in the Plane

Wang Dongda

(Baicheng Teachers' College, 137000)

Abstract

In this paper, we discuss the quadratic system (E_2^3) with three Singular points in the plane: It is shown that if it has high singular point than the limit cycles is centered distribution.

Keywords E_2^3 system, limit cycle, distribution.