第15卷第2期
1995年5月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 15 No. 2
May 1995

概率约束线性规划最优解的存在性*

古 福 文
(成都科技大学数学系，成都 610065)

摘 要 本文给出了概率约束规划 $\min\{cx|P(A_1x\geqslant\xi)\geqslant p,A_2x\geqslant b\}$ 的最优值有限的充要条件；对一类离散型随机向量 ξ，并给出了这一概率约束规划存在最优解的充要条件. 实际中常用的离散型随机向量属于这类离散型随机向量.

关键词 随机规划，概率约束规划，机会约束规划，最优解.

分类号 AMS(1991) 90C15/CCL O221.5

§1 引 言

本文记

$$X=\{x\in R^{k_1}|P(A_1x\geqslant\xi)\geqslant p,A_2x\geqslant b\},V=\{(u,v)\in R^n\times R^{k_2}|(u,v)\geqslant 0,uA_1+vA_2=c\},$$

$$N=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\},N_{i1}\in N\cup\{-\infty\},N_{i2}\in N\cup\{+\infty\}(N_{i1}<N_{i2}),$$

$$Y_i=\{y_{ir}\in R|r\in N\cap(N_{i1},N_{i2})\},\bar{y}_i=\sup\{y_{ir}|y_{ir}\in Y_i\},$$

$$\overline{Y}_i=\begin{cases}Y_i & \bar{y}_i=+\infty\\ Y_i\cup\{\bar{y}_i\} & \bar{y}_i<+\infty\end{cases},\quad a=\begin{cases}\inf\{cx|x\in X\} & X\neq\varnothing\\ +\infty & X=\varnothing\end{cases}\ (i=1,\cdots,n),$$

$$H(\xi)=\{l\in R^n|P(l\geqslant\xi)\geqslant p\},X(l)=\{x\in R^{k_1}|A_1x\geqslant l,A_2x\geqslant b\},$$

$$H^*(\xi)=\{l\in H(\xi)|X(l)\neq\varnothing\},B(\xi)=\{l\in\overline{Y}_1\times\cdots\times\overline{Y}_n|P(l\geqslant\xi)\geqslant p\},$$

$$E(B(\xi))=\{l\in B(\xi)|\text{不存在 } l'\in B(\xi)\text{ 使得 } l'\leqslant l\text{ 且 } l'\neq l\},$$

我们称 $E(B(\xi))$ 为 $B(\xi)$ 的极小点集.

$$E^*(B(\xi))=\{l\in E(B(\xi))|X(l)\neq\varnothing\},$$

$$f(l)=\begin{cases}\inf\{cx|x\in X(l)\} & X(l)\neq\varnothing\\ +\infty & X(l)=\varnothing\end{cases},\quad h(l)=\begin{cases}\sup\{ul+vb|(u,v)\in V\} & V\neq\varnothing\\ -\infty & V=\varnothing\end{cases}.$$

设 $G\subseteq\overline{Y}_1\times\cdots\times\overline{Y}_n$，$|G|$ 表示 G 中的元素个数.

设 ξ 是离散型随机向量，ξ 的第 i 个分量 ξ_i 的支撑集为 Y_i，即 $P(\xi_i\in Y_i)=1$. 假定任给 $y_{ir}\in Y_i$ 有 $P(\xi_i=y_{ir})>0,i=1,\cdots,n$. 显然 $P(\xi\in Y_1\times\cdots\times Y_n)=1$.

注 1 当 $N_{i1}=-\infty$ 或 $N_{i2}=+\infty$ 时，Y_i 为无限可列集，当 $N_{i1},N_{i2}\in N$ 时，Y_i 为有限集.

§2 定理及其证明

* 1992年3月29日收到. 94年10月17日收到修改稿. 成都科技大学青年基金资助项目.

易验证 $X=\bigcup_{t\in H(\xi)}X(t)=\bigcup_{t\in H^*(\xi)}X(t)$，因此

$$a=\begin{cases}\inf\{f(t)\mid t\in H^*(\xi)\} & H^*(\xi)\neq\varnothing\\ +\infty & H^*(\xi)=\varnothing\end{cases}$$

定理 1 给出了规划最优值有限的充要条件.

定理 1　$-\infty<a<+\infty\Leftrightarrow V\neq\varnothing,X\neq\varnothing$.

证明　"$\Rightarrow$". 由 $a<+\infty$ 有 $X\neq\varnothing\Rightarrow H^*(\xi)\neq\varnothing$.

取 $t_0\in H^*(\xi)$，由 $X(t_0)\neq\varnothing$ 有 $f(t_0)<+\infty$；又显然有 $-\infty<a\leqslant f(t_0)\Rightarrow-\infty<f(t)<+\infty\Rightarrow V\neq\varnothing$([2,p96,(d)]).

下证"$\Leftarrow$". 由 $X\neq\varnothing$ 有 $a<+\infty$ 且 $H^*(\xi)\neq\varnothing$.

令 $t^{(p)}=(t_1^{(p)},\cdots,t_n^{(p)})^T$，其中 $t_i^{(p)}=\inf\{t_i\in R\mid P(t_i\geqslant\xi_i)\geqslant p\}$，因 $\lim\limits_{t_i\to-\infty}P(t_i\geqslant\xi_i)=0$，所以

$$t_i^{(p)}>-\infty(i=1,\cdots,n).$$

显然任给 $t\in H^*(\xi)$ 有 $t\geqslant t^{(p)}\Rightarrow X(t)\subseteq X(t^{(p)})\Rightarrow f(t)\geqslant f(t^{(p)})$. 由线性规划的对偶定理([3,p83])有 $f(t^{(p)})\geqslant h(t^{(p)})>-\infty$(因 $V\neq\varnothing$)$\Rightarrow$

$$a=\inf\{f(t)\mid t\in H^*(\xi)\}\geqslant f(t^{(p)})>-\infty\Rightarrow-\infty<a<+\infty.$$

下面我们讨论一类使得概率约束规划存在最优解的离散型随机向量.

定义 1　设离散型随机变量 β 的支撑集为 $Y=\{y_r\in R\mid r\in N'\}$，若 Y 中的元素经过脚标的适当调整后有 $y_r<y_{r+1}$(任给 $r\in N',N'\subset N$)，则称 β 为可按大小排序的.

若 ξ 的每一个分量都是可按大小排序的，则称 ξ 是依分量可按大小排序的.

显然，二项式分布，泊松分布，几何分布，巴斯长分布，对数分布等常用的离散型随机变量都属于可按大小排序的.

在下面的讨论中，设 ξ 是依分量可按大小排序的. 不失一般性，设任给 $y_{ir},y_{i(r+1)}\in Y_i$ 有 $y_{ir}<y_{i(r+1)}(i=1,\cdots,n)$.

我们将证明 $E(B(\xi))$ 是一有限集，为此先给出下面的两个引理.

引理 1　设 $(y_{1l_1},\cdots,y_{nl_n})$ 是 $Y_1\times\cdots\times Y_n$ 中的一点，$\varnothing\neq G\subseteq\{(y_{1j_1},\cdots,y_{nj_n})\in\overline{Y}_1\times\cdots\times\overline{Y}_n\mid(y_{1l_1},\cdots,y_{nl_n})\leqslant(y_{1j_1},\cdots,y_{nj_n})\}$，则

(i)　G 的极小点集 $E(G)\neq\varnothing$，

(ii)　任给 $(y_{1r_1},\cdots,y_{nr_n})\in G$ 存在 $(y_{1j_1},\cdots,y_{nj_n})\in E(G)$ 使得 $(y_{1r_1},\cdots,y_{nr_n})\geqslant(y_{1j_1},\cdots,y_{nj_n})$.

对任意给定的 $(y_{1l_1},\cdots,y_{nl_n})\in Y_1\times\cdots\times Y_n$ 且 $P(\xi_1\leqslant y_{1l_1},\cdots,\xi_n\leqslant y_{nl_n})=p$，记 $D(y_{1l_1},\cdots,y_{nl_n})=\{(y_{1q_1},\cdots,y_{nq_n})\in Y_1\times\cdots\times Y_n\mid(y_{1l_1},\cdots,y_{nl_n})\leqslant(y_{1q_1},\cdots,y_{nq_n})$ 且 $P(\xi_1\leqslant y_{1q_1},\cdots,\xi_n\leqslant y_{nq_n})>p\}$.

用 $E(D(y_{1l_1},\cdots,y_{nl_n}))$ 表示 $D(y_{1l_1},\cdots,y_{nl_n})$ 的极小点集.

引理 2　若 $D(y_{1l_1},\cdots,y_{nl_n})\neq\varnothing$，则 $E(D(y_{1l_1},\cdots,y_{nl_n}))$ 是一非空有限集.

证明　由引理 1 知 $E(D(y_{1l_1},\cdots,y_{nl_n}))$ 是非空的，对向量 $(y_{1l_1},\cdots,y_{nl_n})$ 的维数 n 用归纳法易证 $E(D(y_{1l_1},\cdots,y_{nl_n}))$ 是有限集.

利用引理 1 和引理 2 并对 ξ 的维数 n 作归纳法，我们有下面的性质 1.

性质 1　$E(B(\xi))$ 是一有限集.

由引理 1 下面的性质 2 是显然的.

性质 2　$X=\bigcup_{t\in B(\xi)}X(t)=\bigcup_{t\in E(B(\xi))}X(t)=\bigcup_{t\in E^*(B(\xi))}X(t)$.

对于任给的 $l\in R^{m}$,规划(1)的对偶规划为(2).

$$\begin{aligned}&\min\quad cx,\\&\text{s.t}\quad A_1x\geqslant l, A_2x\geqslant b,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\max\quad ul+vb,\\&\text{s.t}\quad uA_1+vA_2=c,(u,v)\geqslant 0.\end{aligned}\tag{2}$$

性质 3 给出了规划(2)存在最优解的等价条件.

性质 3 $-\infty<h(l)<+\infty\Leftrightarrow$线性规划(2)存在最优解.

证明 "$\Leftarrow$"是显然的.下证"$\Rightarrow$".

设 V 的回收锥为 $V^{*}=\{(u,v)\geqslant 0\mid uA_1+vA_2=0\}$,$W(u,v)=ul+vb$,$V^0$ 表 V 的一切顶点所构成的凸包,显然 V^0 是一非空紧集,且 $V=\{(u,v)+\lambda(u^{*},v^{*})\mid(u,v)\in V^0,(u^{*},v^{*})\in V^{*},\lambda\geqslant 0\}$.

下证

$$\sup\{W(u^{*},v^{*})\mid(u^{*},v^{*})\in V^{*}\}\leqslant 0.\tag{3}$$

反证.若存在$(u_0^{*},v_0^{*})\in V^{*}$ 使得 $W(u_0^{*},v_0^{*})>0$,在 V^0 中取一点(u_0,v_0),则任给 $\lambda>0$ 有$(u_0,v_0)+\lambda(u_0^{*},v_0^{*})\in V\Rightarrow(u_0+\lambda u_0^{*})l+(v_0+\lambda v_0^{*})b=(u_0l+v_0b)+\lambda(u_0^{*}l+v_0^{*}b)\underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty\Rightarrow h(l)=+\infty$.这与假设矛盾.因此(3)成立.

又 W 在 V^0 上连续且 V^0 是非空紧集$\Rightarrow$存在$(u',v')\in V^0$ 使得

$$W(u',v')=\max_{(u,v)\in V^0}W(u,v)\tag{4}$$

由(3)、(4)可得,任给$(u,v)+\lambda(u^{*},v^{*})\in V$ 有 $W(u+\lambda u^{*},v+\lambda v^{*})=(ul+vb)+\lambda(u^{*}l+v^{*}b)\leqslant ul+vb\leqslant u'l+v'b=W(u',v')\Rightarrow W(u',v')=\max\{W(u+\lambda u^{*},v+\lambda v^{*})\mid(u,v)+\lambda(u^{*},v^{*})\in V\}$即$(u',v')$是(2)的最优解.

下面给出本文的基本定理.

定理 2 设 ξ 是依分量可按大小排序的,则概率约束规划存在最优解$\Leftrightarrow X\neq\varnothing,V\neq\varnothing$.

证明 由定理 1 知"$\Rightarrow$"是显然的.下证"$\Leftarrow$".

由性质 1,2 及 $X\neq\varnothing$可得 $E^{*}(B(\xi))$是非空有限集.

任给 $l\in E^{*}(B(\xi))$有 $f(l)<+\infty,h(l)>-\infty$(因 $V\neq\varnothing$);又由线性规划的对偶定理([3,p83])有 $f(l)\geqslant h(l)\Rightarrow$任给 $l\in E^{*}(B(\xi))$有$-\infty<h(l)<+\infty$.由性质 3 知线性规划(2)存在最优解.从而其对偶规划(1)也存在最优解([3,p83]).

设 $x^{*}(l)$是(1)的最优解,则有

$$\begin{matrix}\min & cx\\ \text{s.t} & x\in X\end{matrix}=\min_{l\in E^{*}(B(\xi))}\left\{\begin{matrix}\min & cx\\ \text{s.t} & A_1x\geqslant l,A_2x\geqslant b\end{matrix}\right\}=\min_{l\in E^{*}(B(\xi))}cx^{*}(l).$$

因 $E^{*}(B(\xi))$是有限集,故存在 $\bar{l}\in E^{*}(B(\xi))$使得 $cx^{*}(E)=\min\limits_{l\in E^{*}(B(\xi))}cx^{*}(l)$,即 $x^{*}(\bar{l})$是概率约束规划的最优解.

参 考 文 献

[1] É. Komáromi, *On properties of the probabilistic constrained linear programming problem and its dual*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 55, No. 3(1987), 377—390.

[2] É. Komáromi, *A dual method for probabilistic constrained problems*, Mathematical Programming Study, Vol. 28 (1986), 94—112.
[3] D. G. 鲁恩伯杰，夏尊铨译，线性与非线性规划引论，科学出版社，1980.
[4] 王金德，随机规划，南京大学出版社，1990.
[5] 刘光中，凸分析与极值问题，高等教育出版社，1991.

The Existence of the Optimal Solution for the Probabilistic Constrained Linear Programming Problem

Gu Fuwen

(Chengdu University of Science and Technology)

Abstract

We discuss the problem (P) $\min\{cx|P(A_1x \geq \xi) \geq p, A_2x \geq b\}$, where A_1, A_2 are non-random matrices and b, c are non-random vectors, $p(0 < p < 1)$ is a constant reliability level, ξ is a discrete random vector. Necessary and sufficient conditions of the optimal value of (P) being finite are presented. For one kind of practical discrete random vectors, the necessary and sufficient conditions for existence of an optimal solution of (P) are given.

Keywords stochastic programs, probabilistic constrained programs, optimal solution.