第 15 卷第 2 期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 2
1995 年 5 月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1995

图 $C_{4n+2}\times P_{4k+3}$ 的优美性*

杨燕昌
(北京工业大学应用数学系，北京 100022)

王广选
(北京密云县医院计算机室，北京 101500)

关键词 乘积图，标号，优美图.

分类号 AMS(1991) 05L78/CCL O157.5

关于一般乘积图 $C_l\times C_m$ 的优美性，我们与国外学者几乎同时都做了研究，参见[1]，[2]，[3]，[4]，[5]. 已经解决的是当 l 与 m 全部都是偶数的情况. 当 l 或 m 是奇数时，情况变得异常复杂，[3]仅解决了 $C_6\times P_m$ 的优美性. 本文幸而解决了当 l 是偶数，且 $l\equiv 2\bmod 4$，$m=4k+3$ 时的一类情况. 这时具体标号方法也较复杂.

定义 1 设 $G=(V,E)$ 是一个图，如果对每一个顶点 $v\in V$，存在一个非负整数 $l(v)$（称为顶点 v 的标号），使之满足：

1) $\forall\ u,v\in V$，如果 $u\neq v$，则 $l(u)\neq l(v)$；

2) $\max\{l(v)\,|\,v\in V\}=|E|$；

3) $\forall\ e_1,e_2\in E$，如果 $e_1\neq e_2$，则 $l(e_1)\neq l(e_2)$，其中若 $e=uv$，定义 $l(e)=|l(u)-l(v)|$，（称为边 $e=uv$ 的标号），这样的图 G 称为优美图. 标号 l 称为优美标号.

由定义 1 易知边标集 $I=\{l(e)\,|\,e\in E\}=\{1,2,3,\cdots,|E|\}$.

图 1 我们给出图 $C_l\times P_m$ 的各个顶点 $v_{i,j}$，$i=1,2,3,\cdots,l$；$j=1,2,3,\cdots,m$ 的位置. 容易看出 $C_l\times P_m$ 的边数 $|E|=l(2m-1)$.

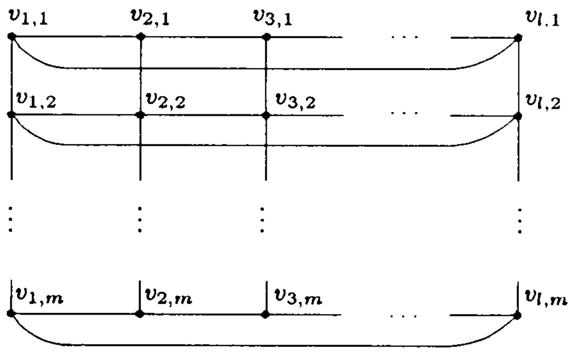

图1 图$C_l\times P_m$ 各顶点的位置

本文我们证明了乘积图 $C_{4n+2}\times P_{4k+3}$ 是优美图.

显然 $C_{4n+2}\times P_{4k+3}$ 的边数 $|E|=2(2n+1)(8k+5)$.

* 1992 年 4 月 9 日收到. 94 年 4 月 15 日收到修改稿. 国家自然科学基金资助项目.

我们分两种情况给出各个顶点的标号，并证明此标号下是优美图.

引理1 当 $n\geqslant 2,k\geqslant 1$ 时，$C_{4n+2}\times P_{4k+3}$ 各个顶点的标号为：

$$l(v_{ij})=\begin{cases}2(2n+1)(8k+5)-\dfrac{(i-1)}{2}(8k+5)-\dfrac{(j-1)}{2}, \\ \qquad i=1,3,5,\cdots,2n+1,\ j=1,3,5,\cdots,4k+3; \\ \dfrac{(i-1)}{2}(8k+5)+\dfrac{(j-2)}{2}, \\ \qquad i=1,3,5,\cdots,2n+1,\ j=2,4,6,\cdots,4k+2;\end{cases} \tag{1}$$

$$l(v_{ij})=\begin{cases}\dfrac{(j-2)}{2}(8k+5)+\dfrac{(j-1)}{2}+(4k+2), \\ \qquad i=2,4,6,\cdots,2n+2,\ j=1,3,5,\cdots,4k+3; \\ 2(2n+1)(8k+5)-\dfrac{(i-2)}{2}(8k+5)-\dfrac{(j-2)}{2}-4k-3, \\ \qquad i=2,4,6,\cdots,2n+2,\ j=2,4,6,\cdots,4k+2;\end{cases} \tag{2}$$

$$l(v_{ij})=\begin{cases}2(2n+1)(8k+5)-\dfrac{(i-2)}{2}(8k+5)+\dfrac{(j-1)}{2}-4k-3, \\ \qquad i=2n+4,2n+6,2n+8,\cdots,4n+2,\ j=1,3,5,\cdots,4k+3; \\ \dfrac{(i-2)}{2}(8k+5)-\dfrac{(j-2)}{2}+4k+2, \\ \qquad i=2n+4,2n+6,2n+8,\cdots,4n+2,\ j=2,4,6,\cdots,4k+2;\end{cases} \tag{3}$$

$$l(v_{ij})=\begin{cases}\dfrac{(i-1)}{2}(8k+5)-\dfrac{(j-1)}{2}, \\ \quad 或\begin{cases}i=2n+5,2n+7,2n+9,\cdots,4n+1,\ j=1,3,5,\cdots,2k+1, \\ i=2n+3,2n+5,2n+7,\cdots,4n+1,\ j=2k+3,2k+5,2k+7,\cdots,4k+3;\end{cases} \\ 2(2n+1)(8k+5)-\dfrac{(i-1)}{2}(8k+5)+\dfrac{(j-2)}{2}, \\ \quad 或\begin{cases}i=2n+3,2n+5,2n+7,\cdots,4n+1,\ j=2,4,6,\cdots,2k; \\ i=2n+5,2n+7,2n+9,\cdots,4n+1,\ j=2k+2,2k+4,2k+6,\cdots,4k+2;\end{cases}\end{cases} \tag{4}$$

当 $i=2n+3$ 时，

$$l(v_{ij})=\begin{cases}(3n+1)(8k+5)-\dfrac{(j-1)}{2}-4k-5, & j=1,3,5,\cdots,2k+1; \\ (3n+1)(8k+5)-k-1, & j=2k+2; \\ (n+1)(8k+5)+4k+\dfrac{(j-2)}{2}+3 & j=2k+4,2k+6,2k+8\cdots,4k+2.\end{cases} \tag{5}$$

则在此种标号下 $C_{4n+1}\times P_{4k+3}$ 是优美图.

证明 首先说明各个顶点的标号彼此不同. 由(1),(2),(3),(4),(5)直接看出各式内顶点标号彼此不同. 由(1)与(2)直接看出(1)与(2)内顶点标号彼此不同，且是介于 $0\leqslant l(v_{ij})\leqslant n(8k+5)+6k+3$ 与 $(3n+2)(8k+5)-(6k+3)\leqslant l(v_{ij})\leqslant 2(2n+1)(8k+5)$.

由(3)与(4)直接看出(3)与(4)内各顶点标号彼此不同，且当 $i\neq 2n+3,i\neq 2n+4$ 时满足 $(n+2)(8k+5)-2k-1\leqslant l(v_{ij})\leqslant 2n(8k+5)+4k+2$ 与 $(2n+2)(8k+5)-4k-3\leqslant l(v_{ij})\leqslant 3n(8k+5)+2k$.

由(3),(4),(5)直接看出当 $i=2n+3, i=2n+4$ 时,各顶点标号彼此不同,且满足 $n(8k+5)+6k+4\leqslant l(v_{ij})\leqslant(n+1)(8k+5)+6k+3$ 与 $(3n+1)(8k+5)-5k-5\leqslant l(v_{ij})\leqslant(3n+1)(8k+5)+k-1$.

综上所述可知 $C_{4n+2}\times P_{4k+3}$ 的顶点标号彼此不同,且满足 $0\leqslant l(v_{ij})\leqslant|E|$.

关于边标号的彼此不同,我们只须根据(1),(2),(3),(4),(5)以及公式 $l(uv)=|l(u)-l(v)|$ 直接计算.

我们有如下计算结果:

$$l(v_{i,j}v_{i,j+1})=2(2n+1)(8k+5)-(i-1)(8k+5)-j+1,$$

其中 $i=1,2,3,\cdots,2n+2$, $j=1,2,3,\cdots,4k+2$.

$$l(v_{i,j}v_{i+1,j})=2(2n+1)(8k+5)-(i-1)(8k+5)-4k-j-1,$$

其中 $i=1,2,3,\cdots,2n+1$, $j=1,2,3,\cdots,4k+3$.

$$l(v_{1,j}v_{4n+2,j})=2n(8k+5)+4k-j+4,$$

其中 $j=1,2,3,\cdots,4k+3$.

$$l(v_{i,j}v_{i,j+1})=2(2n+1)(8k+5)-(i-1)(8k+5)+j-1,$$

其中 $i=2n+4,2n+5,2n+6,\cdots,4n+2$, $j=1,2,3,\cdots,4k+2$.

$$l(v_{i,j}v_{i+1,j})=2(2n+1)(8k+5)-(i-1)(8k+5)-4k+j-4,$$

其中 $i=2n+4,2n+5,2n+6,\cdots,4n+1$, $j=1,2,3,\cdots,4k+3$.

$$l(v_{i,j}v_{i+1,j})=2(2n+1)(8k+5)-(i-1)(8k+5)-4k+j-4,$$

其中 $i=2n+3$, $j=2,4,6,\cdots,2k,2k+3,2k+5,2k+7,\cdots,4k+3$.

$$l(v_{2n+3,j}v_{2n+4,j})=\begin{cases}j+1, & j=1,3,5,\cdots,2k+1;\\ 2n(8k+5)-4k-3, & j=2k+2;\\ j-1, & j=2k+4,2k+6,2k+8,\cdots,4k+2.\end{cases}$$

$$l(v_{2n+2,j}v_{2n+3,j})=4k-j+4,$$

其中 $j=2,4,6,\cdots,2k,2k+3,2k+5,2k+7,\cdots,4k+3$.

$$l(v_{2n+2,j}v_{2n+3,j})=\begin{cases}2n(8k+5)-j-1, & j=1,3,5,\cdots,2k+1;\\ 4k+3, & j=2k+2;\\ 2n(8k+5)-j+1, & j=2k+4,2k+6,2k+8,\cdots,4k+2.\end{cases}$$

$$l(v_{2n+3,j}v_{2n+3,j+1})=\begin{cases}4k+j+4, & j=1,2,3,\cdots,2k;\\ 4k+4, & j=2k+1;\\ 2n(8k+5), & j=2k+2\\ 4k+j+2, & j=2k+3,2k+4,2k+5,\cdots,4k+2.\end{cases}$$

综上所述,逐一将各边标号写出,就会看出边标号集恰为 $I=\{1,2,3,\cdots,2(2n+1)(8k+5)\}$. 所以在此顶点标号下,$C_{4n+2}\times P_{4k+3}$ 是优美图.

引理 2 当 $n\geqslant 2, k=0$ 时,$C_{4n+2}\times P_3$ 各个顶点的标号为:

$$l(v_{ij})=\begin{cases}10(2n+1)-\frac{5}{2}(i-1)-\frac{1}{2}(j-1), & j=1,3,5,\cdots,2n+1,\ j=1,3;\\ \frac{5}{2}(i-1)+\frac{1}{2}(j-2), & i=1,3,5,\cdots,2n+1,\ j=2;\end{cases}\tag{6}$$

$$l(v_{ij})=\begin{cases}\frac{5}{2}(i-2)+\frac{1}{2}(j-1)+2,\ i=2,4,6,\cdots,2n+2,\ j=1,3;\\ 10(2n+1)-\frac{5}{2}(i-2)-\frac{1}{2}(j-2)-3,\ i=2,4,6,\cdots,2n+2,\ j=2;\end{cases}\tag{7}$$

$$l(v_{ij})=\begin{cases}10(2n+1)-\frac{5}{2}(i-2)+\frac{1}{2}(j-1)-3,\ i=2n+6,2n+8,2n+10,\\ \quad\cdots,4n+2,\ j=1,3;\\ \frac{5}{2}(i-2)-\frac{1}{2}(j-2)+2,\ i=2n+6,2n+8,2n+10,\\ \quad\cdots,4n+2,\ j=2;\end{cases}\tag{8}$$

$$l(v_{ij})=\begin{cases}\frac{5}{2}(i-1)-\frac{1}{2}(j-1),\ i=2n+5,2n+7,2n+9,\\ \quad\cdots,4n+1,\ j=1,3;\\ 10(2n+1)-\frac{5}{2}(i-1)+\frac{1}{2}(j-2),\ i=2n+5,2n+7,2n+9,\\ \quad\cdots,4n+1,\ j=2;\end{cases}\tag{9}$$

$$l(v_{ij})=\begin{cases}5n+5+j,\quad i=2n+3,\ j=1,2;\\ 15n-1,\quad i=2n+3,\ j=3;\end{cases}\tag{10}$$

$$l(v_{ij})=\begin{cases}15n+5-j,\quad i=2n+4,\ j=1,3;\\ 5n+5,\quad i=2n+4,\ j=2.\end{cases}\tag{11}$$

则在此种标号下 $C_{4n+2}\times P_3$ 是优美图.

证明 首先说明各个顶点的标号彼此不同. 由(6)与(7)直接看出(6)与(7)内顶点标号彼此不同,且满足 $0\leqslant l(v_{ij})\leqslant 5n+3$, $15n+7\leqslant l(v_{ij})\leqslant 10(2n+1)$,由(8)与(9)直接看出(8)与(9)内顶点标号彼此不同,且满足 $5n+9\leqslant l(v_{ij})\leqslant 10n+2$, $10n+7\leqslant l(v_{ij})\leqslant 15n$,由(10)与(11)直接看出仅有顶点标号集$\{5n+5,5n+6,5n+7,15n-1,15n+2,15n+4\}$. 最后由(8)与(9)注意到 $15n-1$ 不含在(8)与(9)中诸顶点标号之中,所以各顶点标号彼此不同.

关于边标号的彼此不同,我们只须根据(6),(7),(8),(9),(10),(11)以及公式 $l(uv)=|l(u)-l(v)|$ 直接计算.

计算结果: $l(v_{i,j}v_{i,j+1})=10(2n+1)-5(i-1)-j+1$,其中 $i=1,2,3,\cdots,2n+2$, $j=1,2$; $l(v_{i,j}v_{i+1,j})=10(2n+1)-5(i-1)-j-1$,其中 $i=1,2,3,\cdots,2n+1$, $j=1,2,3$; $l(v_{1,j}v_{4n+2,j})=10n-j+4$,其中 $j=1,2,3$; $l(v_{i,j}v_{i,j+1})=20n-5i+j+14$,其中 $i=2n+5,2n+6,2n+7,\cdots,4n+2$, $j=1,2$; $l(v_{i,j}v_{i+1,j})=20n-5i+j+11$,其中 $i=2n+5,2n+6,2n+7,\cdots,4n+1$, $j=1,2,3$.

$$l(v_{2n+3,1}v_{2n+3,2})=1,\ l(v_{2n+3,2}v_{2n+3,3})=10n-8,$$

$$l(v_{2n+4,1}v_{2n+4,2})=10n-1,\ l(v_{2n+4,2}v_{2n+4,3})=10n-3,$$

$$l(v_{2n+4,j}v_{2n+5,j})=\begin{cases}10n-6-\frac{1}{2}(j-1),\quad j=1,3;\\ 10n-5,\quad j=2;\end{cases}$$

$$l(v_{2n+3,j}v_{2n+4,j})=\begin{cases}10n-2,\quad j=1;\\ j\quad j=2,3;\end{cases}$$

$$l(v_{2n+2,j}v_{2n+3,j})=\begin{cases}4, & j=1;\\ 10n, & j=2;\\ 10n-4, & j=3;\end{cases}$$

综上所述，逐一将各边标号写出，就会看出边标号集恰为 $I=\{1,2,3,\cdots,10(2n+1)\}$. 所以在此顶点标号下，$C_{4n+2}\times P_3$ 是优美图.

为了看清我们给出标号的规律，图 2 和图 3 具体地给出了 $C_{10}\times P_3$ 与 $C_{10}\times P_{11}$ 的优美标号.

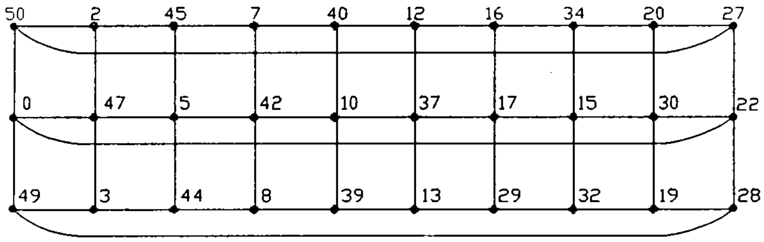

图2 图$C_{10}\times P_3$ 的优美标号

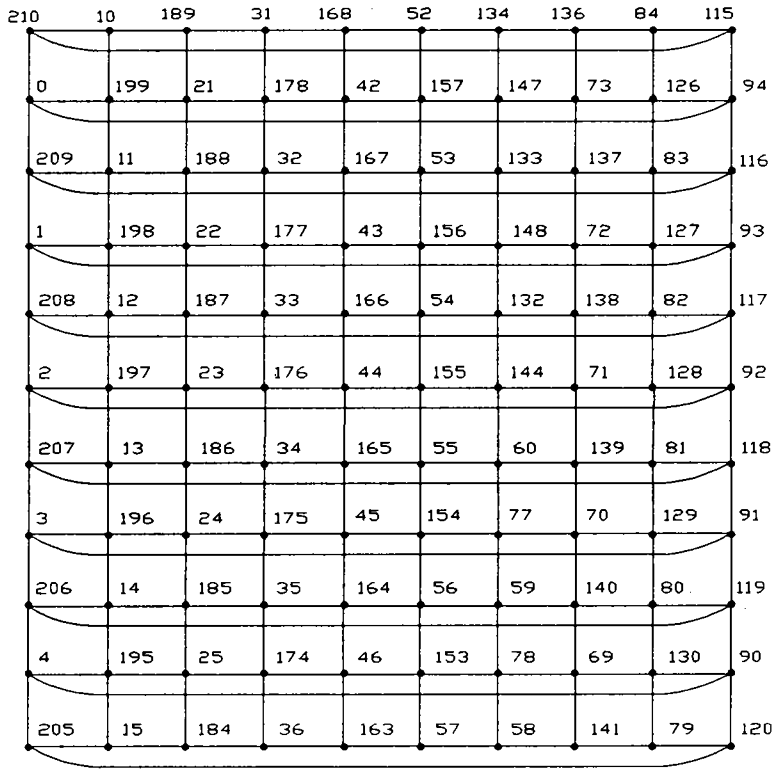

图3 图$C_{10}\times P_{11}$ 的优美标号

引理 1 与引理 2 证明了 $n\geqslant 2$ 时 $C_{4n+2}\times P_{4k+3}$ 的优美性，当 $n=1$ 时，文[5]完全解决了 $C_6\times P_m$ 的优美性. 因此我们完成了定理的证明.

参 考 文 献

[1] J. A. Gallian, *A survey: recent results, conjectures and open problems in labeling graphs*, Journal of Graph Theory, Vol. 13, No. 4, 491—504, 1989.

[2] D. Jungreis and M. Reid, *Labeling grids*, Preprint.

[3] 杨燕昌、王广选，关于两类图的优美性，北京工业大学学报，第 13 卷(1985)，第 3 期，59—66.

[4] 杨燕昌、王广选，图 $C_n\times P_2$ 的优美性，数学研究与评论，第 12 卷(1992)，第 1 期，143—148.

[5] 杨燕昌、王广选，图 $C_6\times P_m$ 与 $C_{4n+2}\times P_{2m}$ 的优美性，天津商学院学报，第 14 卷(1993)，第 4 期，66—71.

On the Gracefulness of Product Graph $C_{4n+2}\times P_{4k+3}$

Yang Yanchang

(Dept. of Appl. Math., Beijing Polytechnic University, 100022)

Wang Guangxuan

(Computer-Room, Miyun County Hospital, Beijing, 101500)

Abstract

It is shown that the product graph $C_{4n+2}\times P_{4k+3}$ is graceful.

Keywords product graph, graph indexing, graceful graph.