第15卷第2期
1995年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 15 No. 2
May 1995

Browder-Hartman-Stampacchia 变分不等式研究概况及问题*

张从军　　　　张石生
(淮北煤师院数学系，安徽 235000)　(四川大学数学系，成都 610064)

摘　要　本文介绍了 Browder-Hartman-Stampacchia 变分不等式理论及应用当前研究的概况及存在的某些问题.

关键词　变分不等式，拟变分不等式，紧集.
分类号　AMS(1991) 49R20/CCL O176.3

Browder-Hartman-Stampacchia 变分不等式在理论和应用上的重要性业已受到公认. 这一变分不等式是本世纪 60 年代 Hartman，Stampacchia 等人在创立变分不等式理论基础时提出和研究的第一个变分不等式[2]. 它最先是在有限维空间加以讨论，以后被 Lions，Browder 等人推广到无穷维空间[3,4,5]，并把所得结果应用于研究力学、控制论、经济数学、对策论、微分方程及优化理论中的许多重要问题[3,4,6]. 后来被证明，该变分不等式解的存在性问题与 Brouwer 不动点定理、FKKM 定理、Ky Fan 极大极小原理、Browder 不动点定理及 Ky Fan 截口定理等都是等价的[7]，这就更显示了这一变分不等式的重要性，并促进了对它的研究.

近十年来，Browder-Hartman-Stampacchia 变分不等式(简记为 BHS-变分不等式)的研究已经相当深入. 本文试就这一工作当前的研究概况和存在问题作一简单介绍.

一　有限维情形

本世纪 60 年代 Hartman，Stampacchia 首先提出和研究了下面的变分不等式问题[2]：

设 $K\subset R^n$ 是一非空闭凸集，$A: K\to R^n$ 是一连续映象. 求 $u\in K$ 使得满足下面的不等方程组：

$$(Au, v-u)\geqslant 0,\ \forall\ v\in K. \tag{1}$$

后人称不等方程组(1)为 Hartman-Stampacchia 变分不等式，而 u 称为该变分不等式的解.

关于变分不等式(1)解的存在性问题，1966 年 Hartman-Stampacchia[2]证明了如下的结果：

定理 1　设 $K\subset R^n$ 是非空有界闭凸集，$A: K\to R^n$ 连续，则存在 $u\in K$ 是(1)的解.

应该指出：当映象 A 满足更强的条件时，即使在 Hilbert 空间的框架下，变分不等式(1)解的存在性问题也已获得解决[1]. 现在问题是：对映象 A 的要求条件能否改变或削弱？

* 1992年4月30日收到. 94年3月26日收到修改稿. 国家自然科学基金和煤炭部优秀青年科学基金资助课题.

二　无穷维情形

1967 年 Browder 在局部凸拓扑线性空间的框架下，讨论了变分不等式(1)解的存在性问题[5]，他证明了下面的定理：

定理 2　设 E 是一局部凸的拓扑线性空间，$K\subset E$ 是一紧凸集，$A:K\to E^*$(E 的共轭空间，下同)是一连续映象，则存在 $u_0\in K$ 满足变分不等式

$$(Au, v-u)\geqslant 0,\ \forall\ v\in K, \tag{2}$$

其中(·，·)表示 E 和 E^* 间的配对.

以后人们称(2)为 BHS-变分不等式.

当空间结构较好时，适当削弱 A 的条件，仍可保证(2)的解的存在. 例如有下面的结果.

定理 3[8]　设 X 是自反 Banach 空间，$C\subset X$ 是无界闭凸集，$\theta\in C$，$A:C\to X^*$ 是单调半连续映象且是强制的，即 $\lim\limits_{\|u\|\to\infty, u\in K}(Au,u)/\|u\|=\infty$，则对任一 $w^*\in X^*$，存在 $u_0\in C$，使得

$$(Au_0-w^*, v-u_0)\geqslant 0,\ \forall\ v\in C.$$

定理 4[1]　设 X 是自反的可分 Banach 空间，$A:X\to X^*$ 是有界的伪单调映象，$j:X\to R\cup\{+\infty\}$ 是一真凸下半连续泛函. 设存在 $v_0\in X$，使得 $j(v_0)<+\infty$ 且

$$\lim_{\|v\|\to\infty}\{(Av, v-v_0)+j(v)\}/\|v\| =+\infty.$$

则对任给的 $f\in X^*$，存在 $u\in X$，满足变分不等式

$$(Au, v-u)+j(v)-j(u)\geqslant (f, v-u),\ \forall\ v\in X. \tag{3}$$

现在待解决的问题是：在定理 3－4 中，空间的可分性和自反性能否削弱或取消？在什么条件下，这两个定理可以推广到局部凸空间？

三　BHS-变分不等式解的性态

如前所述，在 Hilbert 空间中，变分不等式(1)解的存在唯一性问题已获解决，有如下结果：

定理 5[1]　设 H 是一 Hilbert 空间，$K\subset H$ 是一闭凸子集，$A:K\to H$ 是一映象满足：存在 $\alpha>0$，使得 $I-\alpha A:K\to H$ 是一压缩映象，则(1)存在唯一解.

关于变分不等式(2)和(3)解的性态有如下结果

定理 6[1]　设 X 是自反 Banach 空间，$K\subset X$ 是一有界闭凸集，$A:K\to X^*$ 是单调半连续的. 则

(i)　变分不等式(2)有解，其解集是 K 中的闭凸集；

(ii)　如果 A 还是严格单调的，则(2)的解唯一.

定理 7[1]　设 X 是自反 Banach 空间，$K\subset X$ 是一非空闭凸集，$j:K\to(-\infty,+\infty]$ 是真凸下半连续泛函；$A:K\to X^*$，$f\in X^*$ 是一给定元. 则

(i)　若 A 严格单调，则(3)在 K 中至多有一解；

(ii)　若 A 是单调半连续的，则(3)的解集是 K 中的闭凸集.

待解决和待进一步研究的问题是：在 Banach 空间以及更广泛的空间中，变分不等式(2)，(3)解的性态.

四 多值情形的BHS-变分不等式

文[9](1988年)和[10](1991年)分别在不同的条件下，把BHS-变分不等式推广到多值的情形. 他们分别证明了下面的结果.

定理 8[9] 设 E 是自反 Banach 空间，$X\subset E$ 是一非空闭凸集，$T:X\to 2^{E^*}$ 是多值单调映象，使得对每一 $x\in X$，Tx 是 E^* 中的弱紧子集，且 T 由 X 的线段到 E^* 的弱拓扑是上半连续的. 再设存在 $x_0\in X$，使得

$$\lim_{\|y\|\to\infty,y\in X}\ \inf_{w\in T(y)}\mathrm{Re}(w,y-x_0)>0. \tag{4}$$

则存在 $\bar{y}\in X$，使得 $\sup\limits_{x\in X}\inf\limits_{w\in T(\bar{y})}\mathrm{Re}(w,\bar{y}-x)\leqslant 0$；

如果 $T(\bar{y})$ 还是凸的，则存在 $\overline{w}\in T(\bar{y})$，使得 $\mathrm{Re}(\overline{w},\bar{y}-x)\leqslant 0,\forall\ x\in X$.

定理 9[10] 设 E,X,T 如定理 8. 设存在 $y_0\in X$ 使 $\lim\limits_{\substack{\|x\|\to\infty\\ x\in X}}\ \sup\limits_{u\in T(y_0)}\mathrm{Re}(u,x-y_0)>0$. 则存在 $\bar{x}\in X$ 使得

$$\sup_{y\in X}\sup_{u\in T(y)}\mathrm{Re}(u,\bar{x}-y)\leqslant\sup_{y\in X}\inf_{w\in T(\bar{x})}\mathrm{Re}(w,\bar{x}-y)\leqslant 0;$$

如果 $T(\bar{x})$ 还是凸的，则存在 $\overline{w}\in T\bar{x}$，使得 $\mathrm{Re}(\overline{w},\bar{x}-y)\leqslant 0,\ \forall\ y\in X$.

最近作者[11]把多值的BHS-变分不等式推广到局部凸空间，并证明了下面的结果：

定理 10[11] 设 Φ 是实或复数域，E 是 Φ 上的局部凸的 Hausdorff 拓扑线性空间，$X\subset E$ 是非空凸子集，F 是 Φ 上的另一向量空间，具有 $\sigma(F,E)$ 拓扑，$\langle\cdot,\cdot\rangle:F\times E\to\Phi$ 是双线性泛函. 再设

(i) $T:X\to 2^F$ 单调且沿 X 中的线段上半连续；

(ii) $h:X\to R$ 是凸泛函且按 $\sigma(E,F)$-拓扑下半连续；

(iii) 存在 $\sigma(E,F)$-紧集 K 及 $x_0\in X$，使得

$$\inf_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\langle w,y-x_0\rangle>h(x_0)-h(y),\ \forall\ y\in X\backslash K.$$

则存在 $\bar{y}\in X$，使得

$$\inf_{w\in T(\bar{y})}\mathrm{Re}\langle w,\bar{y}-x\rangle\leqslant h(x)-h(\bar{y}),\ \forall\ x\in X.$$

如果 $T(\bar{y})$ 还是紧凸的，则存在 $\overline{w}\in T(\bar{y})$ 使得 $\mathrm{Re}\langle\overline{w},\bar{y}-x\rangle\leqslant h(x)-h(\bar{y}),\ \forall\ x\in X$.

应指出，在定理 10 取 $F=E^*$，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 E 与 E^* 间的配对，且 $h\equiv 0$. 这时 F 中的 $\sigma(F,E)$-拓扑即是 E^* 中的弱*拓扑. 另由(4)易知定理 10 中的条件(iii)成立. 因而由定理 10 立得定理 8. 另外，定理 10 还改进了定理 8 中的有关条件.

关于集值映象的BHS-变分不等式解的性态(即解集的性质，解的唯一性条件等)，研究甚少，是值得进一步考虑的问题.

五 具约束条件的BHS-变分不等式

具约束条件的变分不等式亦称为拟变分不等式，它最早由 Bensoussan, Lions[12,13] 在研究与随机脉冲控制有关的问题时提出的. 现已被成功地应用于解决有关力学和经济的问题，例如 Baiochia 通过未知函数的变换，解决了非矩形水坝的渗流问题；Necus 等利用拟变分不等式成

功地解决了晶体管问题. 另外,拟变分不等式在经济平衡问题中的重要作用,则是熟知的.

关于具约束条件的 BHS-变分不等式,1985 年 Shih, Tan[14] 证明了下面的结果

定理 11 设 E 是局部凸的 Hausdorff 拓扑线性空间, $X\subset E$ 是一非空紧凸集, $S:X\to 2^X$ 是具非空闭凸值的上半连续映象, $T:X\to 2^{E^*}$ 具非空紧凸值且按 X 中的相对拓扑和 E^* 中的强拓扑上半连续. 再设下面的集合是 X 中的开集:

$$\Sigma=\{y\in X:\sup_{x\in S(y)}\inf_{z\in T(y)}\mathrm{Re}\langle z,y-x\rangle>0\}. \tag{5}$$

则存在一点 $\bar{y}\in X$,使得(i) $\bar{y}\in S(\bar{y})$; (ii) 存在 $\bar{z}\in T(\bar{y})$使得 $\mathrm{Re}\langle\bar{z},\bar{y}-x\rangle\leqslant 0$, $\forall\ x\in S(\bar{y})$.

1989 年 Kim[15] 通过适当的条件,削去了(5)中 Σ 是 X 中开集的要求. 他的结果是

定理 12 设 E,X,T 与定理 11 中的相同,设 $S:X\to 2^X$ 是具非空闭凸值的连续映象. 则存在 $\bar{y}\in X$,使得(i) $\bar{y}\in S(\bar{y})$; (ii) $\inf\limits_{u\in T(\bar{y})}\mathrm{Re}\langle u,\bar{y}-x\rangle\leqslant 0,\forall\ x\in S(\bar{y})$.

最近作者在更一般的条件下证明了下面的定理 13,它改进和发展了定理 11,12 中的结果.

定理 13[16] 设 E 是局部凸的 Hausdorff 拓扑线性空间, $X\subset E$ 是非空凸子集, F 是 Φ 上的向量空间(Φ 是实或复数域)且具有 $\eta(F,E)$-拓扑(具体意义见[16]), $\langle\cdot,\cdot\rangle:F\times E\to\Phi$ 是双线性泛函,使得 $\forall\ f\in F, x\to\langle f,x\rangle$在 X 上连续. 再设

(i) $T:X\to 2^F$ 是具紧值的上半连续映象;

(ii) $h:X\to R$ 是下半连续的凸泛函;

(iii) $S:X\to 2^X$ 是具非空紧凸值的上半连续映象.

则存在 $\bar{y}\in X$,使得 $\bar{y}\in S(\bar{y})$,且

$$\inf_{w\in T(\bar{y})}\mathrm{Re}\langle w,\bar{y}-x\rangle\leqslant h(x)-h(\bar{y}),\ \forall\ x\in S(\bar{y}).$$

如果 $T(\bar{y})$还是凸的,则存在 $\bar{w}\in T(\bar{y})$,使得 $\mathrm{Re}\langle\bar{w},y-x\rangle\leqslant h(x)-h(\bar{y})$, $\forall\ x\in S(\bar{y})$.

一个有意义的问题是:能否利用[9,10,14,15,16]中的思想和方法,或通过其它途径,把其他一些变分不等式或拟变分不等式建立在非紧集上?

本文上述结果表明,关于 BHS-变分不等式在不同空间框架下,解的存在性问题的研究已经取得若干重要的结果,而对解的唯一性条件及解集性状研究尚属薄弱. 同样有意义的问题还有:象 Hilbert 空间那样,利用迭代方法或其它方法给出变分不等式解的近似计算? 其中还有大量的问题有待解决. 这些问题的解决,将对 BHS-变分不等式理论及应用研究推进一步.

参 考 文 献

[1] 张石生,变分不等式和相补问题理论及应用,上海科技文献出版社,1991.

[2] P. Hartman & G. Stampacchia, *On some nonlinear elliptic differential functional equations*, Acta Math., 115 (1966), 271—310.

[3] J. L. Lions & G. Stampacchia, *Variational inequalities*, Commu. Pure Applied Math., 20(1967), 493—519.

[4] J. L. Lions, *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[5] F. E. Browder, *A new generalization of the Schauder fixed point theorem*, Math. Ann., 174(1967), 285—

290.
[6] G. Duvaut and J. L. Lions，力学和物理学中的变分不等方程，科学出版社，1987(王耀东译).
[7] 张石生、康世民、向方宽，Brouwer 不动点定理的若干等价形式，成都科技大学学报，No. 2(1990)，1—7.
[8] F. E. Browder, *Nonlinear monoton operators and convex sets in Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 71 (1965), 780—785.
[9] M. H. Shi & K. K. Tan, *Browder-Hartman-Stampacchia variational inequalities fo. multi-valued monotone operators*, J. Math. Anal. Appl., 134(1988), 431—440.
[10] Shi-shen Chang & Ying Zhang, *Generalized KKM theorem and variational inequalities*, J. Math. Anal. Appl., 159(1991), 208—223.
[11] Shishen Chang and Congjun Zhang, *Improvement and generalization for Browder-Hartman-Stampacchia variational inequality* (to appear).
[12] A. Bensoussan and J. L. Lions, *Nouvelle formulation de problems decontrole impulsionnel et applications*, C. R. Acad. Sci. Paris, 276(1973), 1189—1192.
[13] A. Bensoussan and J. L. Lions, Controle impulsionnel et inequations quasi-variationnelles stationnaires, C. R. Ac. Sci Paris, 276(1973), 1279—1284.
[14] M. H. Shin and K. K. Tan, *Generalized quasi-variational inequalities*, J. Math. Anal. Appl., 108(1985), 333—343.
[15] W. K. Kim, *Remark on a generalized quasi-variational inequalities*, Proc Amer. Math. Soc., 103, No. 2 (1989), 667—668.
[16] Shih-sen Chang and Cong-jun Zhang, *On a class of generalized variational inequalities and quasi-variational inequalities*, J. Math. Anal. Appl., 179(1993), 250—259.

On Recent Developments and Some Open Questions in the Study of Browder-Hartman-Stampacchia Variational Inequality

Zhang Congjun
(Dep. of Math., Huaibei Coal Teacher's College)

Zhang Shisheng
(Dept. of Math., Sichuan University)

Abstract

The purpose of this paper is to make a survey on the recent developments and present some open questions in the study of Browder-Hartman-Stampacchia veriational inequality problems.

Keywords variational inequality, quasi-variational inequality, compact set.