关于非光滑分析的一个变分定理及应用*

郎 国 放
(山东经济学院数学经济研究所，济南250014)

本文恒设H是Hilbert空间，$f:H\to R^1$是Lip泛函，D是H中凸闭集，$\partial f(x)$表示f在x的广义梯度. 众所周知，如果f在$x_0\in D$点达到相对于D的局部极小值，并且x_0是D的内点，则$\theta\in\partial f(x_0)$. 如果x_0不是内点，则不能保证$\theta\in\partial f(x_0)$. 自然要问：在附加什么条件下仍保证$\theta\in\partial f(x_0)$. 本文给出了一个更广的结论，作为推论回答了上述问题.

定理1 设存在$k\geqslant 0$，以及$x_0\in D$在D上的相对邻域$U(x_0)$，使得

$$f(x)-f(x_0)\geqslant -k\|x-x_0\|,\quad \forall\, x\in U(x_0),\tag{1}$$

如果$-\partial f(x_0)\subset\overline{D(x_0)}$，则存在$x_0^*\in\partial f(x_0)$，使得$\|x_0^*\|\leqslant k$. 这里$D(x)=\{\lambda(y-x)\mid\lambda\geqslant 0,y\in D\}$.

推论1 设$f(x)$在$x_0\in D$达到相对于D的局部极小值(即存在x_0在D上的相对邻域$U(x_0)$使得$f(x)\geqslant f(x_0)$，$\forall\, x\in U(x_0)$)并且

$$-\partial f(x_0)\subset\overline{D(x_0)},\tag{2}$$

则$\theta\in\partial f(x_0)$.

推论2 设$c=\inf\limits_{x\in D}f(x)>-\infty$，

$$-\partial f(x)\subset\overline{D(x_0)},\quad \forall\, x\in\partial D,\tag{3}$$

则c是$f(x)$的渐近临界值，即存在$\{x_n\}\subset D$，$x_n^*\in\partial f(x_n)$，使得$x_n^*\to\theta$，$f(x_n)\to c$.

推论1回答了本文开头提出的问题. 下面讨论对集值映射不动点定理的应用. 设$F:H\to 2^H$是局部Lip泛函$g(x)$的广义梯度，D是H中的有界凸闭集(不要求有内点).

定理2 设$F(D)=\bigcup\limits_{x\in D}\partial g(x)$是$H$中次相对紧集，并且

$$Fx\subset\overline{I_D(x)},\quad \forall\, x\in\partial D,\tag{4}$$

则F具有不动点$x\in D$，即$x\in Fx$. 其中$I_D(x)=\{x+\lambda(y-x)\mid\lambda\geqslant 0,y\in D\}$.

推论3 设$F(D)$是次相对紧集，并且$Fx\subset D$，$\forall\, x\in\partial D$. 则F在D上具有不动点.

推论3和定理2在变分意义下推广了若干已知结论. 另外，若g满足$g^0(x;h)=d^0g(x;h)$，则(4)式可减弱为$Fx\cap\overline{I_D(x)}\neq\varnothing$.

定理3 设$F(D)$是有界集，并且$Fx\subset\overline{I_D(x)}$，$\forall\, x\in\partial D$. 则$\forall\,\varepsilon>0$，存在$x_\varepsilon\in D$，$x_\varepsilon^*\in Fx_\varepsilon$，使得$\|x_\varepsilon-x_\varepsilon^*\|<\varepsilon$.

* 1991年12月26日收到. 94年11月25日收到修改稿.