广义 Volterra 积分方程解的存在性*

胡适耕 洪世煌
（华中理工大学数学系，武汉 430074）

摘 要 本文考虑 Banach 空间中形如 $x(t)=u(t)+\int_{G_t}f(t,s,x(s))ds$ 的广义 Volterra 积分方程，利用 Mönch 不动点定理得到了所论方程解的某些存在定理.

关键词 广义 Volterra 积分方程，不动点定理，存在定理.
分类号 AMS(1991) 45D05/CCL O175.5

§1 引 言

本文中设 G 是具有正则 Borel 测度 μ 的局部紧 Hausdorff 空间，行文中说及"可测"、"几乎处处"等时概对 μ 而言. 设已给定 G 的紧子集族 $\{G_t:t\in G\}$，它满足以下公理：

(A_1) $\lim\limits_{s\to t}\mu(G_t\triangle G_s)=0$，$\triangle$ 记对称差；

(A_2) $s\in G_t\Rightarrow G_s\subset G_t$;

(A_3) 存在 $t_0\in G$，任给 t_0 的邻域 N，有 t_0 的邻域 N'，使得 $\forall\ t\in N':G_t\subset N$，且 $\exists\ t\in N'$: $\mathrm{Int}\ G_t\neq\varnothing$; $\lim\limits_{t\to t_0}\mu G_t=0$.

设 $(X,|\cdot|)$ 是一 Banach 空间. 给定 $u:G\to X$ 与 $f:G\times G\times\Omega\to X$，$\Omega\subset X$ 为开集，考虑如下的广义 Volterra 积分方程（简称 GVIE）：

$$x(t)=u(t)+\int_{G_t}f(t,s,x(s))ds, \tag{1}$$

其中 ds 是 $d\mu(s)$ 的简写. 方程(1)概括了多种有重要应用价值的特殊情况，其中特别包括通常的 Volterra 积分方程

$$x(t)=u(t)+\int_{a}^{t}f(t,s,x(s))ds \tag{2}$$

及其多维推广[1]. 近年来在 Banach 空间的框架下研究方程(2)的工作颇多（如见[2,3,4]），这些工作无疑为方程(1)的研究提供了启示.

可能是最先考虑形如(1)的 GVIE 的文献[5]仅涉及 $X=\mathbb{R}^1$ 的情况. 我们在[6]中就一般的 X 研究了方程(1)，利用 Darbo 不动点定理证明了某些存在定理. 本文继续[6]的研究，但采用更精细的工具，因而在更一般的条件证明了(1)的可解性. 本文的方法基于 Mönch 不动点定理及关于非紧测度的一个积分不等式，后者的一个最初形式乃由 Mönch[7] 在研究抽象微分方

* 1992年6月11日收到.

程的边值问题时得到.

§2 概念与引理

分别以 α,β 记 Kuratowski 非紧测度与球非紧测度,关于它们的定义与基本性质依据[8,§7]. 任给可测集 $J\subset G, B\subset L^1(J,X)$,约定 $B(t)=\{x(t):x\in B\}, B(J)=\bigcup_{t\in J}B(t), S(J,B)=\left\{\int_J x(t)dt: x\in B\right\}$. 若存在 $g\in L^1(J)$,使对任给 $x\in B$ 有 $|x(t)|\leqslant g(t)$, a. e.,则说 B 在 J 上一致可积.

引理 1[7,9] 设 X 可分, $B\subset L^1(J,X)$是一致可积的可数集,则 $\beta(S(J,B))\leqslant\int_J\beta(B(t))dt$.

引理 2 设 $B\subset L^1(J,X)$是一致可积的可数集, $\alpha(B(t))\leqslant h(t)\in L^1(J)$,则

$$\alpha(S(J,B))\leqslant 2\int_J h(t)dt. \tag{3}$$

证明 因每个 $x\in B$ 是几乎可分值的[10,Ch. 5, §4]),不妨设有可分闭子空间 $Y\subset X$,使得 $B(J)\subset Y$,因此 $S(J,B)\subset Y$. 以 β_Y 记 Y 中的球非紧测度,则由引理 1 有

$$\beta_Y(S(J,B))\leqslant\int_J\beta_Y(B(t))dt.$$

而 $\alpha(S(J,B))\leqslant 2\beta_Y(S(J,B)), \beta_Y(B(t))\leqslant\alpha(B(t))\leqslant h(t)$,由此得出不等式(3).

引理 3[6,8] 设 $J\subset G$ 紧, $C(J,X)$中采用 sup 范数, $B\subset C(J,X)$等度连续,则

$$\alpha(\beta)=\sup_{t\in J}\alpha(B(t)).$$

本文主要定理基于 Mönch 的以下不动点结果(见[7,Th. 2. 1]或[8,Th. 18. 2]):

引理 4 设 M 是 Banach 空间 E 中的闭凸集, $T\in C(M,M)$. 若存在 $x_0\in M$,使得任何满足 $\overline{B}=\overline{\mathrm{co}}(\{x_0\}\cup TB)$ ($\overline{\mathrm{co}}A$ 记 A 之闭凸包)的可数集 $B\subset M$ 相对紧,则 T 有不动点.

§3 主要结果

保持前两节的约定与记号. 为书写简便,对任给 $b\in G$,约定 $Z_b=C(G_b,X)$,在 Z_b 中采用 sup 范数 $\|x\|_b\triangleq\sup\{|x(t)|:t\in G_b\}$. 任给 $V\subset X$,约定 $V_b=C(G_b,V)$. 若 $V\subset X$ 是有界凸闭集,则 V_b 显然是 Z_b 中的有界凸闭集. 以下总假定 $u\in C(G,X), u_0=u(t_0)\in\Omega, t_0$ 依公理(A_3). 若存在 $b\in G$, $\mathrm{Int}\ G_b\neq\varnothing, x\in Z_b$,使当 $t\in G_b$ 时 $x(t)$满足(1),则说 x 是方程(1)在 G_b 上的解;当一个如上的解存在时说方程(1)有解.

以下是本文的主要结果.

定理 1 设 $f:G\times G\times\Omega\to X$ 满足以下条件:

(H_1) $\forall\ t\in G: f(t,\cdot,\cdot)$满足 Caratheodory 条件,即 $f(t,s,x)$对 $s\in G$(强)可测,对几乎所有的 $s\in G$ 关于 $x\in\Omega$ 连续.

(H_2) 存在 t_0 的邻域 N_1 与 u_0 的邻域 $V_1\subset\Omega$,使得$\forall\ b\in N_1, t\in G_b$,关于 $x\in C(G_0,V_1)$一致地有

$$\lim_{\tau\to t}\int_{G_t}|f(t,s,x(s))-f(\tau,s,x(s))|ds=0. \tag{4}$$

(H$_3$) 存在 t_0 的邻域 N_2 与 u_0 的邻域 $V_2\subset\Omega$ 及 $g\in L^1(N_2)$，使对任给 $t,s\in N_2,x\in V_2$ 有

$$|f(t,s,x)|\leqslant g(s).$$

(H$_4$) 存在函数 $\omega:G\times R_+\to R_+$，$\omega(s,\xi)$满足 Caratheodory 条件，对 ξ 单调增；对任给 $t,s\in G$ 与有界集 $W\subset\Omega$ 有 $\alpha(f(t,s,W))\leqslant\omega(s,\alpha(W))$；$q(t)\equiv 0$ 满足不等式

$$q(t)\leqslant 2\int_{G_t}\omega(s,q(s))ds \tag{5}$$

的唯一非负连续函数.

则方程(1)有解.

证明 1° 取 $\varepsilon>0$ 充分小，使 $V=\overline{B}_\varepsilon(u_0)\subset V_1\cap V_2$，$V_1,V_2$ 依条件(H$_2$)(H$_3$). 取 t_0 的邻域 $N_3\subset N_1\cap N_2(N_1,N_2$ 依条件(H$_2$)(H$_3$))，使得$\forall\ t\in N_3$：$|u(t)-u(t_0)|<\varepsilon/2$. 由公理(A$_3$)，可取 t_0 的邻域 $N\subset N_3$，使得$\forall\ t\in N$：$G_t\subset N_3$. 取定 $b\in N$，使 Int $G_b\neq\varnothing$. 因$\lim\limits_{t\to t_0}\mu G_t=0$(公理(A$_3$))，不妨设

$\int_{G_b}g(s)ds<\varepsilon/2$. V_b 是 Z_b 中的有界闭凸集，$u|G_b\in V_b$.

2° 任给 $x\in V_b,t\in G_b,s\in G_t$，有 $G_t\subset G_b\subset N_3$(用公理(A$_2$)及 b 的选择)，$x(s)\in V\subset V_2$，于是由条件(H$_3$)有$|f(t,s,x(s))|\leqslant g(s)$. 因此可用

$$Fx(t)=\int_{G_t}f(t,s,x(s))ds,\quad t\in G_b \tag{6}$$

定义一函数 $Fx:G_b\to X$. 任给 $t,\tau\in G_b$，有

$$\begin{aligned}|Fx(t)-Fx(\tau)|&=\left|\int_{G_t}f(t,s,x(s))ds-\int_{G_\tau}f(\tau,s,x(s))ds\right|\\&\leqslant\int_{G_t\cap G_\tau}|f(t,s,x(s))-f(\tau,s,x(s))|ds+\int_{G_t\setminus G_\tau}|f(t,s,x(s))|ds+\int_{G_\tau\setminus G_t}|f(\tau,s,x(s))|ds\\&\leqslant\int_{G_t}|f(t,s,x(s))-f(\tau,s,x(s))|ds+\int_{G_t\triangle G_\tau}2g(s)ds=I_1+I_2.\end{aligned}$$

因 $t\in G_b\subset N_1,V\subset V_1$，故由条件(H$_2$)推出，当 $\tau\to t$ 时关于 $x\in V_b$ 一致地有 $I_1\to 0$. 由公理(A$_1$)，当 $\tau\to t$ 时 $\mu(G_t\triangle G_\tau)\to 0$，从而 $I_2\to 0$. 这就证得 FV_b 在 G_b 上等度连续；特别，$FV\subset Z_b$. 因此(6)式定义出算子 $F:V_b\to Z_b$；进而依 $Tx=u+Fx(x\in V_b)$定义出算子 $T:V_b\to Z_b$. 下面验证 T 满足引理 4 之条件.

3° 证 F 连续(从而 T 连续). 设 $x,x_n\in V_b(n=1,2,\cdots)$，$\|x_n-x\|_b\to 0(n\to\infty)$，今证 $\|Fx_n-Fx\|_b\to 0(n\to\infty)$. 若此结论不真，则有 $\delta>0$，$\{t_n\}\subset G_b$，使得

$$|(Fx_n-Fx)(t_n)|\geqslant\delta,\quad n=1,2,\cdots. \tag{7}$$

不妨设 $t_n\to t\in G_b$. 注意

$$|(Fx_n-Fx)(t_n)|\leqslant|Fx_n(t_n)-Fx_n(t)|+|Fx_n(t)-Fx(t)|+|Fx(t)-Fx(t_n)|.$$

由前段已证的等度连续性，当 $n\to\infty$时有

$$|Fx_n(t_n)-Fx_n(t)|\to 0,\quad |Fx(t)-Fx(t_n)|\to 0.$$

其次，由条件(H$_1$)，对几乎所有 $s\in G_b$ 有

$$f(t,s,x_n(s))\to f(t,s,x(s))\quad(n\to\infty).$$

于是由控制收敛定理得出

$$|Fx_n(t)-Fx(t)|\leqslant\int_{G_t}|f(t,s,x_n(s))-f(t,s,x(s))|ds\to 0\ (n\to\infty),$$

因此 $|(Fx_n-Fx)(t_n)|\to 0\ (n\to\infty)$，这与(7)式矛盾.

4° 证 $TV_b\subset V_b$. 任给 $x\in V_b$，$t\in G_b$，有

$$\begin{aligned}|Tx(t)-u_0|&\leqslant|u(t)-u_0|+|Fx(t)|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\int_{G_t}|f(t,s,x(s))|ds\qquad(\text{因 } t\in G_b\subset N_3)\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\int_{G_t}g(s)ds\qquad(\text{用条件}(\mathrm{H}_3))\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\int_{G_b}g(s)ds<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\qquad(\text{由 } b \text{ 的选择}).\end{aligned}$$

可见 $Tx(t)\in V$，从而 $Tx\in V_b$.

5° 设可数集 $B\subset V_b$ 满足

$$\overline{B}=\overline{\mathrm{co}}(\{u\}\cap TB).\tag{8}$$

今证 $\alpha(B)=0$(从而 B 相对紧)，这是证明的关键部分. 由(8)推出 $\alpha(B)=\alpha(TB)=\alpha(FB)$，因此只要证 $\alpha(FB)=0$. 令 $Q=FB$. 由第 2°段所证知 Q 在 G_b 上等度连续，于是由引理 3 有

$$\alpha(Q)=\sup\{\alpha(Q(t));\ t\in G_b\}.$$

因此只要证 $q(t)\overset{\triangle}{=}\alpha(Q(t))\equiv 0\ (t\in G_b)$.

固定 $t\in G_b$. 以 A_t 记形如 $s\to f(t,s,x(s))\ (s\in G_t,x\in B)$ 的函数之全体，则条件(H_3)推出 $A_t\subset L^1(G_t,X)$ 是一致可积的可数集. 注意 $Q(t)=S(G_t,A_t)$（记号依引理 2）. 任给 $s\in G_t$，由条件(H_4)有($B(s)$显然有界)

$$\alpha(A_t(s))=\alpha(\{f(t,s,x(s));\ x\in B\})=\alpha(f(t,s,B(s)))\leqslant\omega(s,\alpha(B(s))).\tag{9}$$

易见(8)式推出 $B(s)\subset\overline{\mathrm{co}}(\{u(s)\}\cup(TB)(s))\ (s\in G_b)$，因此

$$\alpha(B(s))\leqslant\alpha((TB)(s))=\alpha(Q(s))=q(s).\tag{10}$$

因 $\omega(s,\xi)$ 对 ξ 增加，故结合(9)，(10)得

$$\alpha(A_t(s))\leqslant\omega(s,q(s)),\quad s\in G_t.\tag{11}$$

由 Q 等度连续容易推出 $q(s)$ 连续. 由(11)并用引理 2 得

$$\alpha(Q(t))=\alpha(S(G_t,A_t))\leqslant 2\int_{G_t}\omega(s,q(s))ds,$$

即 $q(t)$ 满足不等式(5). 于是条件(H_4)推出 $q(t)\equiv 0$.

综上所证，可将引理 4 用于 $T:V_b\to V_b$，得出 $x\in V_b$，使得 $x=Tx=u+Fx$，x 显然是方程(1)在 G_b 上的解. 证毕.

注 1 条件(H_2)可代以较强的条件：

(H_2') 存在 t_0 的邻域 N 与 u_0 的邻域 $V\subset\Omega$，使 $f(\cdot,s,x)$ 关于 $(s,x)\in N\times V$ 一致地连续.

若 $f(t,s,x)$ 与 t 无关，则条件(H_2)平凡地满足.

注 2 若 $f(t,s,x)$ 在点 (t_0,t_0,u_0) 连续，则必有 t_0 的紧邻域 N 与 u_0 的邻域 V：$f(N\times N\times V)$ 有界，由此显然推出条件(H_3)满足.

条件(H_4)要复杂一些，其验证取决于函数ω的选择．下面考虑一种特殊情况．为此需要对集族$\{G_t\}$引进附加的公理

(A_4)　集$\{(t,s):t\in G_s$且$s\in G_t\}\subset G\times G$关于积测度$\mu\times\mu$为零测集．

设$0\leqslant h\in L^1_{loc}(G)$，$\omega(t,\xi)=h(t)\xi$，则$\omega(t,\xi)$显然满足Caratheodory条件且对$\xi$单调增．设非负连续函数$q(t)$满足不等式

$$q(t)\leqslant 2\int_{G_t}h(s)q(s)ds,\quad t\in G. \tag{12}$$

利用(12)可归纳地推出

$$q(t)\leqslant 2^n\int_{G_t}h(s_1)ds_1\int_{G_{s_1}}h(s_2)ds_2\cdots\int_{G_{s_{n-1}}}h(s_n)q(s_n)ds_n. \tag{13}$$

固定$t=s_0$，令$M=\sup\{q(s):s\in G_t\}$，以φ_i记$G_{s_i}(i=0,1,\cdots,n-1)$的特征函数，则(13)可写成

$$q(t)\leqslant 2^nM\int_{G_t\times\cdots\times G_t}\cdots\int\varphi_1(s_1)\cdots\varphi_n(s_n)h(s_1)\cdots h(s_n)ds_1\cdots ds_n. \tag{14}$$

令

$$Q(s_1,s_2,\cdots,s_n)=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)}\varphi_1(s_{i_1})\varphi_2(s_{i_2})\cdots\varphi_n(s_{i_n}),$$

其中$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$遍取$(1,2,\cdots,n)$的$n!$个排列．对(14)右端的积分变量$(s_1,s_2,\cdots,s_n)$进行置换，得到

$$q(t)\leqslant\frac{2^nM}{n!}\int_{G_t\times\cdots\times G_t}\cdots\int Q(s_1,\cdots,s_n)h(s_1)\cdots h(s_n)ds_1\cdots ds_n. \tag{15}$$

利用公理(A_4)不难证明在$G^n=G\times\cdots\times G$上几乎处处有$Q(s_1,s_2,\cdots,s_n)\leqslant 1$．于是从(15)得

$$q(t)\leqslant\frac{2^nM}{n!}\int_{G_t\times\cdots\times G_t}\cdots\int h(s_1)\cdots h(s_n)ds_1\cdots ds_n=\frac{2^nM}{n!}\Big[\int_{G_t}h(s)ds\Big]^n.$$

令$n\to\infty$，得出$q(t)=0$．这就可从定理1得出．

定理2　设附加的公理(A_4)满足，f满足条件$(H_1)\sim(H_3)$（记号依定理1，下同）；存在$h\in L^1_{loc}(G)$，使对任给$t,s\in G$与有界集$V\subset\Omega$，有$\alpha(f(t,s,V))\leqslant h(s)\alpha(V)$．则方程(1)有解．

注3　定理2中的h特别可取常数，相应的条件变成"$f(t,s,\cdot)$关于某常数k为α-Lipschitz映射"（参考[8，§7]）．

下面给出一个"整体的"存在性结果．

定理3　设G是紧的，$f:G\times G\times X\to X$满足条件(H_1)，(H_2)，(H_4)（但要求其中$\Omega=X$，$N_1=G$，$V_1\subset X$为任何有界集）及条件

(H_3')　存在$0\leqslant g,h\in L^1(G)$，使对任给$t,s\in G$，$x\in X$有

$$|f(t,s,x)|\leqslant g(s)|x|+h(x)，且\ \|g\|_1\leqslant 1.$$

则方程(1)有定义在G上的解．

证明　可循定理1证明的步骤进行．主要的改动是：以空间$Z\triangleq C(G,X)$代替定理1证明中的Z_b，以$M=C(G,\overline{B}_\rho(0))$代$V_b$，其中$\rho$是某个适当大的正数．设$F$定义如(6)，$Tx=u+Fx$．则对任给$x\in M$，$t\in G$有

$$|Tx(t)|\leqslant|u(t)|+|Fx(t)|\leqslant\|u\|_0+\int_{G_t}|f(t,s,x(s))|ds$$

$$\leqslant\|u\|_0+\int_G[g(s)|x(s)|+h(s)]ds \qquad (\text{用条件}(H_3'))$$

$$\leqslant\|u\|_0+\rho\|g\|_1+\|h\|_1\leqslant\rho, \qquad (\text{因 }\rho\text{ 充分大})$$

($\|\cdot\|_0$记 sup 范数),可见 $TM\subset M$. 证明的其它部分从略.

注 4 任给 $a\in G$,将定理 3 用到 G_a 可得出方程(1)有定义于 G_a 上的解的条件.

注 5 对于特殊的方程(2),因有适当的延拓程序可用,应用定理 3 时还可放宽条件. 例如条件(H_3')中的限制 $\|g\|_1<1$ 可以去掉.

§4 两种特殊情况

首先考虑方程(1)的特款

$$x(t)=u(t)+\int_{G_t}K(t,s)\varphi(s,x(s))ds, \tag{16}$$

其中 $K:G\times G\to L(X)$, $\varphi:G\times\Omega\to X$. 若令 $f(t,s,x)=K(t,s)\varphi(s,x)$,则直接从定理 1 得出:

定理 4 设 K,φ 满足以下条件:

(i) $K(t,\cdot)$可测,φ 满足 Caratheodory 条件;

(ii) 存在 t_0 的邻域 N, u_0 的邻域 $V\subset\Omega$ 及 $g\in L^1(N)$,使得 $k\overset{\triangle}{=}\sup\limits_{N\times N}\|K(t,s)\|<\infty$;对任给$(s,x)\in N\times V$ 有 $|\varphi(s,x)|\leqslant g(s)$;$\forall\ t\in N$,有 $\lim\limits_{\tau\to t}\int_{G_t}\|K(t,s)-K(\tau,s)\|g(s)ds=0$;

(iii) 存在 $\omega:G\times R_+\to R_+$, $\omega(s,\xi)$满足 Caratheodory 条件且对 ξ 单调增;任给 $w\subset V$ 有 $\alpha(\varphi(s,W))\leqslant\omega(s,\alpha(W))$;$q(t)\equiv0$ 是满足 $q(t)\leqslant 2k\int_{G_t}\omega(s,q(s))ds$ 的唯一非负连续函数.

则方程(16)有解.

其次,考虑比(16)更特殊的方程

$$x(t)=u(t)+\int_{G_t}K(t,s)\varphi(x(s))ds, \tag{17}$$

其中 $\varphi\in C(\Omega,X)$. 我们建立

定理 5 设 K,φ 满足以下条件:

(i) $K(t,s)$关于 $s\in G$ 可测;

(ii) 存在 t_0 的邻域 N 与 $g\in L^1(N)$,使对任给 $t,s\in N$ 有 $\|K(t,s)\|\leqslant g(s)$,且

$$\lim_{\tau\to t}\int_{G_t}\|K(t,s)-K(\tau,s)\|ds=0;$$

(iii) 存在连续增函数 $\psi:R_+\to R_+$,使对任给有界集 $V\subset\Omega$ 有 $\alpha(\varphi(V))\leqslant\psi(\alpha(V))$;$q(t)\equiv0$ 是满足不等式 $q(t)\leqslant 2\int_{G_t}g(s)\psi(q(s))ds$ 的唯一非负连续函数.

则方程(17)有解.

证明 令 $f(t,s,x)=K(t,s)\varphi(x)$，则 f 显然满足条件(H_1)．取 u_0 的邻域 $V_1\subset\Omega$，使 $\varphi(V_1)$ 有界．由此易见条件(ii)⇒条件(H_2)，(H_3)．其次令 $\omega(s,\xi)=g(s)\psi(\xi)$，则

$$\alpha(f(t,s,V))\leqslant\|K(t,s)\|\alpha(\varphi(V))\leqslant g(s)\psi(\alpha(V))=\omega(s,\alpha(V))(t,s\in N,V\subset\Omega),$$

可见条件(iii)⇒条件(H_4)．于是要证结论由定理 1 推出．

参 考 文 献

[1] P. R. Beesack, *Systems for multidimensional Volterra integral equations and inequalities*, Nonlinear Anal., 9(1985), 1451—1486.

[2] R. L. Vaughan, *Existence and comparison results for nonlinear Volterra integral equations in Banach spaces*, Appl. Anal., 7(1978), 331—348.

[3] 黄发伦，Banach 空间中的非线性 Volterra 积分方程的某些问题，数学学报，24(1981)，143—153.

[4] Zeng Quan, *Nonlinear Volterra integral equations in Banach spaces and their applications*, Math. Appl., 2:1(1989), 9—18.

[5] A. Rokov and D. Bainov, *Integral equations and inequalities of Volterra type for functions defined in partially ordered spaces*, J. Math. Anal. Appl., 125(1987), 483—507.

[6] 胡适耕，γ-Lipschitz 模数与抽象 Volterra 积分方程，系统科学与数学，12:3(1992)，199—206.

[7] H. Mönch, *Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces*, Nonlinear Anal., 4(1980), 985—999.

[8] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[9] H. P. Heinz, *On the behaviour of measures of noncompactness with respect to differentiation and integration of vector-valued functions*, Nonlinear Anal., 7(1983), 1351—1371.

[10] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

The Existence of Solutions of Generalized Volterra Integral Equations

Hu Shigeng Hong Shihuang

(Dept. of Math., Huazhong Univ. of Sci. and Tech., Wuhan)

Abstract

In this paper, we consider generalized Volterra integral equations in Banach spaces of the form $x(t)=u(t)+\int_{G_t}f(t,s,x(s))ds$. By using the Mönch fixed point theorem, some existence theorems for solutions are obtained.

Keywords generalized Volterra integral equation, fixed point theorem, existence theorem.