第15卷第3期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 3
1995年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1995

L^2空间中的均方随机积分*

龚兆仁
(东北财经大学，大连 116023)

摘　要　本文在$L^2(d\mu)$空间中定义了比Riemann均方积分更为广泛的一种均方随机积分，并讨论了这种积分的性质及随机积分可交换顺序定理.

关键词　$L^2(d\mu)$、L^2-积分，均方连续平稳过程，均方收敛.

分类号　AMS(1991) 60G35/CCL 0211.61

1　引　言

在考虑均方连续平稳过程$\{x(t),t\in R\}$的外推、内插及过滤问题时[1][2]，往往要应用随机积分交换顺序定理，即

$$\int_a^b f(s)x(t-s)ds=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\varphi(\lambda)dz(\lambda),\tag{1}$$

其中$\varphi(\lambda)=\int_a^b f(s)e^{-is\lambda}ds$，$-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$，$f(s)\in L^2(d\mu)$，$z(\lambda)$为$x(t)$谱表示中的随机测度.

显然，并非一切$f(s)\in L^2(d\mu)$(1)式左边作为Riemann和的均方积分(以下记为R-积分)都存在，且(1)式成立的证明也不显然. 本文在$L^2(d\mu)$中定义一种均方随机积分，它对$L^2(d\mu)$中的函数都有意义且与R-积分等价(即如果R-积分存在，则这二种积分相等). 此外还讨论了这种积分的基本性质及积分可交换顺序定理，特别是(1)式对$L^2(d\mu)$中的函数$f(s)$恒成立.

2　引理与定义

以下讨论总假定$\{x(t),t\in R\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上均方连续的平稳过程，$Ex(t)=0$，相关函数为$B(\tau)$，并记

$$L^2(d\mu)\stackrel{\wedge}{=}\{f:\int_E|f|^2d\mu<\infty\},$$

其中E为有限区间或R.

引理1　连续函数类C在$L^2(d\mu)$中是处处稠密的.

引理2　设$f(t)\in L^2(d\mu)$，$t\in[a,b]$. 若$f_n(t)\in C\cap L^2$使$\mathop{\mathrm{l.i.m}}\limits_{n\to\infty}f_n(t)=f(t)$，则

* 1993年8月25日收到. 95年3月8日收到修改稿.

$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_a^b f_n(t)x(t)dt$ 存在、唯一，且与 $f_n(t)$ 选择无关(符号 l. i. m 表示均方极限，下同).

证明 由于 $f_n(t)\in C$，故 (R) $\int_a^b f_n(t)x(t)dt$ 总存在，又

$$E\left|\int_a^b f_n(t)x(t)dt-\int_a^b f_m(t)x(t)dt\right|^2=\int_a^b\int_a^b[f_n(t)-f_m(t)]\overline{[f_n(s)-f_m(s)]}B(t-s)dtds$$

$$\leqslant B(0)\left|\int_a^b[f_n(t)-f_m(t)]dt\right|^2\leqslant B(0)(b-a)\int_a^b|f_n(t)-f_m(t)|^2dt\to 0(n,m\to\infty)$$

所以 $\int_a^b f_n(t)x(t)dt$ 为 $L^2(dp)$ 中的基本列，因而存在唯一元素 $\xi\in L^2(dp)$，使

$$\xi=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_a^b f_n(t)x(t)dt$$

如果还有 $g_n(t)\in C\cap L^2$，使 $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,g_n(t)=f(t)$，将 $f_n(t)$，$g_n(t)$ 交互排列得函数列 $\{h_n(t),n\geqslant 1\}$，由此可证得

$$\xi=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_a^b h_n(t)x(t)dt=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_a^b g_n(t)x(t)dt.$$

此即表明极限 ξ 与 $f_n(t)$ 选择无关.

定义 设 $f(t)\in L^2(d\mu)$，$t\in[a,b]$，则定义 $f(t)x(t)$ 的均方随机积分为

$$\int_a^b f(t)x(t)dt\overset{\wedge}{=}\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_a^b f_n(t)x(t)dt,$$

其中 $f_n(t)\in C\cap L^2$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)=f(t)$.

如果 $b<a$，则定义 $\int_a^b f(t)x(t)dt=-\int_b^a f(t)x(t)dt.$

如果 $f(t)\in L^2(-\infty,+\infty)$，又 $\underset{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}{\mathrm{l.i.m}}\int_a^b f(t)x(t)dt$ 存在，则定义

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)x(t)dt\overset{\wedge}{=}\underset{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}{\mathrm{l.i.m}}\int_a^b f(t)x(t)dt.$$

引理 3 设 $f(t)\in L^2(d\mu)$，如果 (R) $\int_a^b f(t)x(t)dt$ 存在，则 (R) $\int_a^b f(t)x(t)dt=\int_a^b f(t)x(t)dt.$

证明 设 $f_n(t)\in C\cap L^2$ 使 $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\,f_n(t)=f(t)$，则

$$E\left|(\mathrm{R})\int_a^b f_n(t)x(t)dt-(\mathrm{R})\int_a^b f(t)x(t)dt\right|^2\leqslant B(0)(b-a)\int_a^b|f_n(t)-f(t)|^2dt\to 0(n\to\infty),$$

故 (R) $\int_a^b f(t)x(t)dt=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_a^b f_n(t)x(t)dt=\int_a^b f(t)x(t)dt$.

由定义及引理 3 即得.

引理 4 设 $f(t)\in L^2(-\infty,\infty)$，(R) $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)x(t)dt$ 存在，则 $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)x(t)dt$ 存在，且

$$(\mathrm{R})\int_{-\infty}^{\infty}f(t)x(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)x(t)dt.$$

3 均方随机积分性质及积分可交换顺序定理

由 Riemann 均方积分性质[4]及 L^2 均方随机积分定义，容易证明 L^2 均方积分具有如下性质：

性质 1 设 $f(t)\in L^2(d\mu)$，$Y\in L^2(dp)$，则内积

$$\left(\int_a^b f(t)x(t)dt, Y\right)=\int_a^b (f(t)x(t),Y)dt,$$

即

$$E\{[\int_a^b f(t)x(t)dt]\overline{Y}\}=\int_a^b E[f(t)x(t)\overline{Y}]dt.$$

特别有

$$E[\int_a^b f(t)x(t)dt]=\int_a^b f(t)Ex(t)dt.$$

又若 $g(t)\in L^2(d\mu)$，则

$$E[\int_a^b f(s)x(s)ds]\,\overline{[\int_a^b g(t)x(t)dt]}=\int_a^b\int_a^b f(s)\,\overline{g(t)}B(s-t)dsdt.$$

证明 设 $f_n(t)\in C\cap L^2$，$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}f_n(t)=f(t)$，则

$$\int_a^b f(t)x(t)dt=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_a^b f_n(t)x(t)dt$$

故有

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(t)x(t)dt, Y\right)&=\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(t)x(t)dt, Y\right)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b E[f_n(t)x(t)\overline{Y}]dt\\&=\int_a^b E[f(t)x(t)\overline{Y}]dt.\end{aligned}$$

同理可证其余.

性质 2 设 $f(t)\in L^2(d\mu)$，则 $Y(t)\overset{\wedge}{=}\int_a^t f(s)x(s)ds$ 在 $[a,b]$ 上均方连续，均方可导，且 $Y'(t)=f(t)x(t)$.

证明 设 $f_n(t)\in C\cap L^2$ 使 $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}f_n(t)=f(t)$，则

$$E|Y(t+h)-Y(t)|^2=\left\|\int_t^{t+h}f(s)x(s)ds\right\|^2=\lim_{n\to\infty}\left\|\int_t^{t+h}f_n(s)x(s)ds\right\|^2\leqslant Mh^2\to 0(h\to 0).$$

所以 $Y(t)$ 均方连续. 又

$$\begin{aligned}\left\|\frac{Y(t+h)-Y(t)}{h}-f(t)x(t)\right\|^2&\leqslant\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|f(s)x(s)-f(t)x(t)\|^2ds\\&\leqslant\frac{1}{h}\int_t^{t+h}|f(s)-f_n(s)|^2\|x(s)\|^2ds+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}|f_n(s)|^2\|x(s)-x(t)\|^2ds\\&\quad+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}|f_n(s)-f(t)|^2\|x(s)\|^2ds\to 0\ (n\to\infty,h\to 0),\end{aligned}$$

故 $Y'(t)=f(t)x(t)$.

性质 3 设 $f(t,s)\in L^2(d\mu)$，$t,s\in[a,b]$. 令 $Y(t)=\int_a^t f(t,s)x(s)ds$，$t\in[a,b]$，则 $Y(t)$ 均方连续，且对任意 $t\in[a,b]$ 有

$$\int_a^t[\int_a^r f(r,s)x(s)ds]dr=\int_a^t[\int_s^t f(r,s)dr]x(s)ds$$

证明 仿照性质 2，可证 $Y(t)$ 是均方连续的. 记

$$X=\int_a^t[\int_a^r f(r,s)x(s)ds]dr,\quad Y=\int_a^t[\int_s^t f(r,s)dr]x(s)ds,\quad Z=X-Y.$$

重复利用性质 1 即得$(X,Z)=(Y,Z)$，从而有 $X=Y$.

定理 1　设$\{x(t),t\in R\}$为均方连续平稳过程，其对应的正交增量过程及谱函数分别为 $z(\lambda)$与 $F(\lambda)$，$f(s,\lambda)$为$[a,b]\times(-\infty,+\infty)$上连续函数，$f(\cdot,\lambda)\in L^2(dF)$，$|f(s,\lambda)|\leqslant M$. 令

$$Y(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(s,\lambda)dz(\lambda),\ s\in[a,b],$$

则 $Y(s)$为均方连续的二阶矩过程，且

$$\int_a^b\Big[\int_{-\infty}^{\infty}f(s,\lambda)dz(\lambda)\Big]ds=\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_a^b f(s,\lambda)ds\Big]dz(\lambda).\tag{2}$$

证明　由定义可直接验证 $Y(s)$为均方连续的二阶矩过程. 令 $\varphi(\lambda)=\int_a^b f(s,\lambda)ds,\lambda\in R$，则$|\varphi(\lambda)|\leqslant M(b-a)\in L^2(dF)$，故(2)式两边积分都有意义.

对区间$[a,b]$作任一分割：

$$a=s_0<s_1<\cdots<s_n=b,$$

记 $\Delta s_i=s_i-s_{i-1}(1\leqslant i\leqslant n)$，$|\Delta|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta s_i$，任取 $\xi_i\in[s_{i-1},s_i]$，则 $\varphi(\lambda)=\underset{|\Delta|\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\,\varphi_n(\lambda)$. 其中 $\varphi_n(\lambda)=\sum\limits_{j=1}^{n}f(\xi_j,\lambda)\Delta s_j$.

由于$|\varphi_n(\lambda)|\leqslant M(b-a)$，根据控制收敛定理，有$\underset{|\Delta|<0}{\mathrm{l.i.m}}\,\varphi_n(\lambda)=\varphi(\lambda)$，$L^2(dF)$. 所以

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)dz(\lambda)&=\underset{|\Delta|\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(\lambda)dz(\lambda)=\underset{|\Delta|\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\sum_{j=1}^{n}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi_j,\lambda)dz(\lambda)\Big]\Delta s_j\\&=\underset{|\Delta|\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\sum_{j=1}^{n}r(\xi_j)\Delta s_j=\int_a^b r(s)ds,\end{aligned}$$

即(2)式成立.

仿照定理 1 的证明，可证得

定理 2　设$\{x(t),t\in R\}$为均方连续平稳过程，$Ex(t)=0$，相应的正交增量过程及谱函数分别为 $z(\lambda)$与 $F(\lambda)$. 如果 $f(s)\in C\cap L^2$，$s\in[a,b]$，则

$$\int_a^b f(s)x(t-s)ds=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\varphi(\lambda)dz(\lambda),\tag{3}$$

其中 $\varphi(\lambda)=\int_a^b f(s)e^{-is\lambda}ds,\ \lambda\in R$.

由 L^2 空间均方随机积分的定义及定理 2，可得

定理 3　设$\{x(t),t\in R\}$为均方连续平稳过程，$Ex(t)=0$，相应的正交增量过程及谱函数分别为 $z(\lambda)$与 $F(\lambda)$. 如果 $f(s)\in L^2(d\mu)$，$s\in[a,b]$，则

$$\int_a^b f(s)x(t-s)ds=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\varphi(\lambda)dz(\lambda),\tag{4}$$

其中 $\varphi(\lambda)=\int_a^b f(s)e^{-is\lambda}ds,\ \lambda\in R$.

定理 4　设$\{x(t),t\in R\}$为均方连续平稳过程，$Ex(t)=0$，相应的正交增量过程及谱函数分别为 $z(\lambda)$与 $F(\lambda)$. 如果 $f(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}g(\mu)d\mu$，$|g(\lambda)|\leqslant N$(常数)，$f(s)\in L^2(-\infty,\infty)$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(s)x(t-s)ds=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\varphi(\lambda)dz(\lambda),\tag{5}$$

其中 $\varphi(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(s)e^{is\lambda}ds,\ \lambda\in R$.

证明 因为 $\varphi(\lambda)\in L^2(-\infty,\infty)$，$|g(\lambda)|\leqslant N$，所以 $\varphi(\lambda)\in L^2(dF)$，并且有

$$\varphi(\lambda)=\underset{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}{\mathrm{l.i.m}}\int_a^b f(s)e^{-is\lambda}ds,\ L^2(dF).$$

从而得

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\varphi(\lambda)dz(\lambda)=\underset{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}{\mathrm{l.i.m}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\left[\int_a^b f(s)e^{-is\lambda}ds\right]dz(\lambda)=\underset{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}{\mathrm{l.i.m}}\int_a^b f(s)x(t-s)ds$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(s)x(t-s)ds$$

参 考 文 献

[1] Яглом, A. M, 具有有理谱密度的平稳随机过程的外推、内插及过滤，数学进展，Vol. 2，No. 2，1955.

[2] 龚兆仁、许承德，多维平稳过程对线性系统的滤波问题，应用数学，Vol. 6，No. 3，1993.

[3] J. L. Doob，*Stochastic Processes*，New York，1953.

[4] 龚兆仁，高等概率论与随机过程，大连理工大学出版社，1995.

L^2-space Integral in the Mean Square

Gong Zhaoren

(Northeastern Univ. of Finance and Economics, Dalian 116023)

Abstract

We consider integrals in the mean square in the L^2-space, which generalize Riemann L^2-integral. Properties of the integral are also discussed.

Keywords $L^2(d\mu)$-space, L^2-integral, continuous in mean stationary process, convergence in the mean square.